ELEMENTOS

DE

ARITMÉTICA RAZONADA

ESCRITOS
PARA USO DE LOS ALUMNOS
DE LA

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

POR

MANUEL MARIA CONTRERAS

Profesor de Matemáticas en dicho Establecimiento y en la Escuela Normal para Profesores,
Ingeniero de Minas,
Ensayador y Beneficiador de Metales, etc.

DECIMA QUINTA EDICION.

MÉXICO.
ANTIGUA IMPRENTA DE EDUARDO MURGUÍA.
CALLE DEL COLISEO VIEJO, NÚM. 2.

1905

Amado Navarro

AL SEÑOR

Don Gabino Barreda

en testimonio de aprecio y alta consideración
dedica este trabajo

Manuel María Contreras.

OPINIONES publicadas sobre las Matemáticas del Ingeniero Manuel María Contreras.

Los que suscribimos certificamos:

1.º Que el profesor D. Manuel María Contreras escribió su Tratado de Matemáticas por encargo del Director de la Escuela Nacional Preparatoria, con el objeto de satisfacer debidamente el programa del actual plan de estudios.

2.º Que el original de su Aritmética fué examinado por los CC. profesores Gabino Barreda, Francisco Díaz Covarrubias, Rafael A. de la Peña, é Ignacio Ortiz de Zárate; que el de su Algebra, lo fué por los profesores Manuel Fernández Leal y Luis del Castillo, y que los de su Geometría y Trigonometría lo fueron por los profesores Manuel Ramírez y Francisco Echeagaray, quienes unánimemente los consideraron buenos y adecuados á la enseñanza.

3.º Que la junta general de catedráticos de dicha Escuela ha ratificado esa calificación y los ha aceptado como obras de texto.

4.º Que las modificaciones que la experiencia ha indicado y hemos propuesto al autor las ha adoptado, y que seguirá haciendo algunas otras en las posteriores ediciones, con el fin de ir sucesivamente facilitando y mejorando la enseñanza de los alumnos, y

5.º Que con el uso de los mencionados tratados de Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría, hemos obtenido durante varios años, muy buenos resultados en la instrucción de nuestros discípulos, tanto en las clases del gobierno como en las particulares.

México, Octubre 16 de 1878.—*M. Fernández.—M. Ramírez.—M. Calderón.—A. Barroso.—F. Echeagaray.—J. Vallarino.—Rafael Barba.—M. Villamil.—Rafael Angel de la Peña.—Emilio G. Baz.—Luis del Castillo y Pacheco.—Ignacio Ortiz de Zárate.*

Del anterior documento resulta, pues, que las obras de Matemáticas del Sr. Contreras, no sólo fueron examinadas y declaradas buenas por personas competentes, sino que con el uso de ellas durante algunos años, se han obtenido buenos resultados en la enseñanza.

Suplicamos á nuestros colegas, se sirvan reproducir el anterior certificado, en honor de una persona que como el Sr. Contreras, coopera con empeño á la instrucción de la juventud.

(*Diario Oficial*, Octubre 26 de 1878.)

Señores redactores de *La Libertad*:

Agradeceremos mucho á vdes. se sirvan publicar en su acreditado diario el certificado siguiente:

Los que suscriben, antiguos profesores de la Escuela Nacional de Agricultura y Veterinaria certifican: que durante los años de 1875 y 1876 han dado la clase de primer curso de Matemáticas siguiendo como obra de texto la del Sr. Ingeniero Manuel María Contreras, con notorio aprovechamiento de los alumnos, como consta por las calificaciones que obran en los libros respectivos de exámenes. Como constancia extendemos el presente en México, á 21 de Octubre de 1878.—*Manuel Cordero.—José C. Segura.—Vicente U. Alcaráz.*

Señores redactores de *La Libertad:*

Suplicamos encarecidamente á vdes. se sirvan insertar en su ilustrado diario el certificado adjunto:

Como directores de establecimientos de instrucción primaria y preparatoria en esta capital, certificamos: que en nuestros respectivos colegios y durante varios años, se han adoptado como obras de texto para la enseñanza de Matemáticas los tratados de Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría, escritos por el ingeniero Manuel María Contreras, y que con ellos se han obtenido buenos resultados en la instrucción y aprovechamiento de los discípulos.

México, Octubre 18 de 1878.—*Adrián Fournier*, director de. Liceo Franco-Mexicano.—*Ricardo Rode*, socio director del Rode's English Boarding School.—*Emilio Katthain.—A. Bracho.—Emilio G. Baz*, director del instituto Anglo-Franco-Mexicano.—*M. Soriano.—José Saturnino Yarza*, director del colegio Hispano-Mexicano.

(*La Libertad*, Octubre 22 y 31 de 1878.)

PRÓLOGO DE LA PRIMERA EDICIÓN.

Toda educación científica racional, se apoya en el estudio de las Matemáticas

Al publicar este tratado de primer curso de Matemáticas, que consta de Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría, debo indicar cuáles fueron las causas que me obligaron á emprender este trabajo y la manera con que lo he desempeñado.

A fines del año de 1868 fuí honrado con el nombramiento del Supremo Gobierno y con el voto de los profesores de la Escuela Nacional Preparatoria para dar la cátedra del primer año de Matemáticas; y habiendo creido el Señor Director D. Gabino Barreda que era no sólo conveniente, sino aun necesario formar un texto para la enseñanza del primer curso de Matemáticas; me encargó que lo escribiese conforme al programa de dicho plantel, en una forma accesible á los jóvenes de tierna edad, que sin más conocimientos que las primeras operaciones de Aritmética, se dedican á hacer los cursos preparatorios de instrucción profesional.

Aunque desde luego comprendí las dificultades de mi encargo, lo acepté porque era de mi deber corresponder á la confianza que de mí se había hecho, y porque como Profesor tenía la obligación de cooperar á plantear un sistema de enseñanza racional y de utilidad práctica, como lo es el establecido por la actual ley de instrucción pública, y á allanar las dificultades con que los discípulos tropiezan en el estudio de las ciencias exactas.

Ningún medio he perdonado para formar un texto completo, claro y sencillo.

Después de leer las obras de varios autores semejantes á la mía, he consultado con otros profesores, y muy particularmente he hecho un estudio práctico al enseñar estas materias, para tratarlas en la forma más adecuada á su objeto. Esta obra la he escrito y corregido durante algunos años al dar mis lecciones, no sólo de acuerdo con el programa de la ley, sino muy especialmente con el fin de satisfacer las necesidades manifestadas por los discípulos.

Por último, para que este texto pudiera aceptarse en las Escuelas Nacionales como obra de asignatura, pasó por la prévia censura de una comisión de Profesores, y con este motivo me aproveché de las observaciones que se sirvieron comunicarme para introducir algunas mejoras.

La claridad y el orden han sido el objeto principal de mi trabajo, en el que, por estar destinado á servir de base á los demás estudios, he tenido que ocuparme desde las nociones más simples hasta los límites del programa. Algunos párrafos que, en mi concepto, no deben formar parte del curso de la Escuela Preparatoria, pero los cuales podrán leer con provecho los discípulos en su repaso, irán señalados con un asterisco.

A pesar de mi empeño y de mis esfuerzos, desconfío haber llenado satisfactoriamente la comisión que, por los motivos indicados, acepté; pues por una parte no he podido extenderme en una obra que debe ser elemental, y por otra no siempre es fácil tratar con claridad y concisión materias nuevas para alumnos que carecen de práctica en el estudio.

Si este trabajo llega á ser de alguna utilidad á la juventud, y si sirve para mejorar el sistema de enseñanza en México, quedarán satisfechos los deseos de

El Autor.

Ernesto Arredondo [illegible]

ELEMENTOS

DE

PRIMER CURSO DE MATEMÁTICAS.

ARITMÉTICA.

INTRODUCCIÓN Y SISTEMA DE NUMERACIÓN.

Definiciones de matemáticas y objeto de esta ciencia.—*Se llama Matemáticas, la ciencia que trata de la cantidad cuando es susceptible de medida. Su objeto es determinar las cantidades desconocidas, valiéndose de las relaciones que existen entre ellas y las conocidas, y enseñar los procedimientos más adecuados para obtener el resultado que se busca.*

Por ciencia se entiende el conocimiento de un sistema de verdades relativas todas á un objeto común.

Es indispensable que haya coordinación entre las verdades para constituir una ciencia, llamándose *teoría* al enlace que nuestra mente percibe entre las verdades ó hechos fundamentales de una ciencia y las que son sus consecuencias. El objeto de toda ciencia es poder prever lo desconocido, dándonos los medios más sencillos para deducir de las verdades conocidas otras nuevas.

Cantidad es todo lo que puede ser mayor ó menor, como el tiempo, la distancia, el peso de los cuerpos, etc.

Las matemáticas se ocupan de la cantidad únicamente cuando puede medirse. Así, el dolor y la alegría, por ejemplo, aunque son susceptibles de aumento ó disminución, no son objeto de las matemáticas, porque no es posible medir esas afecciones.

La medida ó valorización de una cantidad puede hacerse por métodos indirectos, y el conocimiento de éstos es uno de los principales objetos de la ciencia. Si aplicando una vara contra una pared se mide su altura, ésta será una operación mecánica y directa; pero si sin llegar á la pared determinamos su altura, el procedimiento tendrá que ser científico é indirecto. De esta valorización de las cantidades desconocidas por medios indirectos, se ocupa la ciencia, y el objeto final se obtiene por operaciones más ó menos complicadas, según sea la naturaleza de la cuestión, enseñando las matemáticas el medio más sencillo que pueda emplearse en cada caso para resolver las cuestiones relativas á la cantidad.

2.—*Principio es una verdad de la que se deducen otras.*

Los principios se dividen en *axiomas y en teoremas.*

Axioma es todo principio evidente por sí mismo, es decir, que expresa un hecho del que desde nuestros primeros años tenemos, aun sin percibirlo, continuas pruebas y que por lo mismo admitimos sin discusión y con solo verlo enunciado. Por ejemplo, es un axioma que el todo es mayor que una de sus partes.

Teorema es un principio, que no teniendo el carácter de evidencia palmaria que los axiomas, para persuadirnos de su verdad, necesitamos de un raciocinio que se llama demostración. Por ejemplo, es un teorema que el cociente no se altera cuando se multiplican el dividendo y el divisor por un mismo número.

Las matemáticas son una ciencia *exacta*, porque sus resultados, como los datos de que parte, son exactos, y además, la naturaleza de la ciencia es tal, que siempre es posible que quedemos persuadidos de la verdad de las conclusiones á que llega.

3.—PARTES DE LAS MATEMÁTICAS.—Las principales divisiones de las matemáticas son tres: el *cálculo, la geometría* y *la mecánica racional.*

El calculo se ocupa de los procedimientos que sirven para deducir de las cantidades conocidas las desconocidas, valiéndose de las relaciones más sencillas entre unas y otras.

La geometria se ocupa del estudio de la extensión, considerando las relaciones de forma, posición y magnitud.

La mecánica racional trata de las leyes y de las causas del movimiento y del equilibrio.

Entre estas partes suele haber un intimo enlace, interviniendo frecuentemente el cálculo en todas ellas.

El cálculo se divide en *álgebra, y en aritmética. El álgebra tiene por objeto determinar el modo de formación de una cantidad desconocida por medio de ciertas relaciones que existen entre las cantidades conocidas.*

La aritmética tiene por objeto determinar un valor numérico desconocido que satisfaga determinadas condiciones, sirviéndose de los valores conocidos.

Reuniendo á estas divisiones la combinación que se ha hecho del cálculo con la geometría para poder tratar de un modo más general y abstracto las cuestiones relativas á la extensión, á lo cual se ha dado el nombre de *geometría analítica ó general* y el *cálculo infinitesimal*, se tendrá una idea de las principales divisiones adoptadas para el estudio de las matemáticas, y que son: *aritmética, álgebra, geometría, geometría analítica ó general, cálculo infinitesimal y mecánica racional.*

4—*Aritmética es la ciencia que se ocupa en el estudio de las cantidades expresadas por números: considera la naturaleza de éstos, sus propiedades, y suministra medios fáciles, así para expresarlos como para calcular por medio de ellos.*

5.—*Número es un conjunto de unidades ó de partes de la unidad.*

6.—*Unidad es una cantidad que se toma ó elige, comunmente á arbitrio para valuar todas las cantidades de su misma especie.* La unidad siempre se expresa por la palabra *uno* ó *una.*

Si se trata de valuar el peso de un cuerpo, se refiere, por ejemplo, al gramo, que es la unidad que se ha escogido con este objeto, y así se dice que una barra de plata pesa mil gramos. Para medir las distancias se ha escogido el metro. En estos dos casos la elección de la unidad ha sido convencional; pero otras veces, como cuando decimos que han muerto veinte hombres; la unidad es un objeto de la naturaleza.

7.—Todo número es cantidad, pero no toda cantidad es número. En efecto, pudiendo todo número hacerse mayor ó menor, será siempre cantidad; pero, por ejemplo: un montón de harina, una afección moral, la intensidad de la luz, etc., pudiendo ser más ó menos grandes, serán cantidades reales, y sin embargo, no son números.

8.—Los números en cuanto á su formación pueden ser *enteros, quebrados ó mixtos*, y en cuanto á las clases de sus unidades pueden ser *abstractos ó concretos.*

Se llama número entero, al que consta exclusivamente de una ó de varias unidades cabales, como 1, 3, 9, que no se componen de partes de la unidad.

Quebrado es el número menor que la unidad, como dos tercios ó siete octavos. A los quebrados también se les llama fracciones.

Número mixto es el que consta de unidades completas y de partes de la unidad, como cinco y tres cuartos.

Número abstracto es el que no determina la especie de sus unidades, como 2, 6, 8, ó como cuando se dice 5 veces.

Número concreto es el que determina la especie de sus unidades, como 5 litros, 9 toros, 26 años.

Los números concretos pueden ser homogéneos ó heterogéneos.

Números homogéneos son los de la misma especie, como 5 pesos, 9 pesos y 3 pesos.

Números heterogéneos son los de diferente especie, como 7 arrobas, 9 metros y 6 árboles.

Número dígito es el que se escribe con un solo guarismo, y compuesto es el que se escribe con dos ó más.

9.—SISTEMA DE NUMERACIÓN.—*Sistema de numeración, es la parte de la aritmética que se ocupa en el modo de denominar por medio de pocas palabras todos los números posibles, y de representarlos con un reducido número de caracteres. Se divide en hablada y escrita.*

La numeración hablada tiene por objeto denominar con pocas palabras combinadas entre sí, todos los números posibles.

La numeración escrita tiene por objeto representar con solo diez caracteres todos los números posibles.

10.—Si á la unidad le agregamos otra unidad formaremos el número dos; si á este número le agregamos otra unidad, formaremos el número tres, y agregando sucesivamente una unidad, iremos formando todos los números.

La unidad y los primeros conjuntos de unidades simples, ó unidades de primer orden, se representan y se denominan como sigue:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve,

que se llaman números *cardinales*.

La carencia de unidades se llama *cero*, y se representa por este símbolo, 0.

Con el objeto de reducir el número de voces necesarias para denominar todos los números, y para concebir más fácilmente su valor, se ha convenido en que el conjunto de *diez* unidades constituya una *decena*, ó unidad mayor de *segundo orden*; en que *diez* decenas formen la *centena* ó unidad de *tercer orden*; en que *diez* centenas formen el *millar*, etc.; y en denominar los números combinando los nombres de las partes de que constan.

Para representar con solo *diez* caracteres todos los números, se ha convenido en darles á los símbolos, 1, 2, 3...9, con que se representan las unidades simples, dos valores: uno correspondiente á su figura y otro al lugar que ocupe, de manera que un guarismo *solo*, representa unidades; si está seguido de una cifra á la derecha, representará decenas; si está seguido de dos cifras, representará centenas; si está seguido de tres, representará millares; y así sucesivamente.

Los números que únicamente constan de decenas se representan por alguna de las nueve cifras 1, 2....9 seguida de un cero y se denominan como sigue:

1 decena se escribe	10	y se llama	diez unidades	
2 decenas	„ 20	„	veinte	„
3 decenas	„ 30	„	treinta	„
4 decenas	„ 40	„	cuarenta	„
5 decenas	„ 50	„	cincuenta	„
6 decenas	„ 60	„	sesenta	„
7 decenas	„ 70	„	setenta	„
8 decenas	„ 80	„	ochenta	„
9 decenas	„ 90	„	noventa	„

Para representar los números compuestos de decenas y de unidades basta reemplazar el cero, que indica carencia de unidades simples, por una de las cifras 1 á 9, y para formar sus nombres es suficiente expresar después del nombre de las decenas el de las unidades. Por ejemplo, los números comprendidos entre 3 y 4 decenas se representan y se nombran como sigue:

30 treinta.
31 treinta y uno.
32 treinta y dos.
.
.
38 treinta y ocho.
39 treinta y nueve.

De esta manera se forman los nombres y los símbolos de los números desde 1 hasta 99. El uso ha sancionado las siguientes excepciones: en lugar de diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, diez y cinco, se denominan estos números: *once*, *doce*, *trece*, *catorce* y *quince*. Como se habrá notado, para que un guarismo represente decenas, es preciso que esté seguido de otro.

Las centenas se representan también con una de las nueve cifras cardinales, pero seguida de dos ceros á la derecha, que indican carencia de decenas y de unidades.

1 centena se escribe	100	y se llama	cien unidades.	
2 centenas	„ 200	„	doscientas	„
3 centenas	„ 300	„	trescientas	„
4 centenas	„ 400	„	cuatrocientas	„

5 centenas se escribe 500 y se llama quinientas unidades.
6 centenas „ 600 „ seiscientas „
7 centenas „ 700 „ setecientas „
8 centenas „ 800 „ ochocientas „
9 centenas „ 900 „ novecientas „

Para representar los números compuestos de centenas y de unidades, basta reemplazar el primer cero de la derecha por las cifras 1 á 9, y en los números compuestos de centenas, decenas y unidades se reemplazarán los dos ceros por las cifras de 10 á 99. Para formar sus nombres se expresan en seguida del de las centenas las voces con que denominamos los números 1 al 99. Tomemos como ejemplo algunos de los números comprendidos entre 500 y 600.

501 quinientos uno.
509 quinientos nueve.
510 quinientos diez.
511 quinientos once.
590 quinientos noventa.
599 quinientos noventa y nueve.

De esta manera se forman los nombres y los símbolos de los números desde 1 hasta 999, y como se habrá observado, para que un guarismo indique centenas, es preciso que esté seguido de otros dos.

11.—Agregando una unidad al número 999 nos resulta un grupo compuesto de *diez centenas* ó de *mil unidades*, que se llama *millar*, y que constituye una *clase* especial. Los millares se cuentan de 1 á 999, y los nombres de los números que constan únicamente de millares se forman posponiendo á los de los números de 1 á 999 la palabra *mil*. Se escriben y denominan como sigue:

1,000 un mil.
2,000 dos mil.
3,000 tres mil.
10,000 diez mil.
11,000 once mil.
100,000 cien mil.
101,000 ciento un mil.
999,000 novecientos noventa y nueve mil.

Para representar los números compuestos de millares y de unidades, considerando como unidades los números de 1 á 999, bastará reemplazar, según sea el caso, uno, dos, ó los tres ceros que siguen á los millares por los números correspondientes desde 999 hasta 1; y para formar sus nombres será suficiente decir en seguida de la palabra mil el nombre del número de las unidades de 999 á 1. Para aclaración pondremos los siguientes ejemplos:

1,001 un mil uno
4,060 cuatro mil sesenta.
500,068 quinientos mil, sesenta y ocho.
706,800 setecientos seis mil, ochocientos.
999,999 novecientos noventa y nueve mil, novecientos noventa y nueve.

De esta manera se forman los nombres y los símbolos de los números de 1 á 999,999 unidades, y como se habrá observado, para que un guarismo indique millares tiene que estar seguido de tres cifras.

Con el conjunto de *mil* millares se forma una clase mayor que se denomina *millón*, se cuentan los millones como si fueran unidades de 1 á 999,999, y para denominar estas cantidades se anteponen á la palabra *millón* los nombres de los números desde 1 hasta 999,999, expresando en seguida los nombres de los números desde 999,999 hasta 1.

Para representar estas cantidades se escriben primero los números desde 1 hasta 999,999 que indiquen los millones de que consta la cantidad, luego se pone un punto y á la derecha se escriben primero tres cifras que indiquen los millares y luego otras tres que representen las unidades simples.

Un millón de millones forman el *billón;* un millón de billones forman el *trillón;* un millón de trillones forman el *cuatrillón*; etc., escribiéndose cada clase de unidades á la izquierda de su inmediata menor, y los números se denominan expresando sucesivamente el nombre de cada cifra unido al del orden ó al de la clase que representa, comenzando por las clases mayores y siguiendo con las menores; pasando en silencio los órdenes y las clases de unidades de que carezca el número.

12.—A continuación ponemos una tabla graduada de nuestro sistema de numeración, que se llama *decimal*, de todos los órdenes de unidades hasta las decenas de billón

Uno	1
Diez	10
Cien	100
Mil	1,000
Diez mil	10,000
Cien mil	100,000
Un millón	1.000,000
Diez millones	10.000,000
Cien millones	100.000,000

Mil millones..................	$1{,}000\overset{1}{.}000{,}000$
Diez mil millones............	10,000.000,000
Cien mil millones...........	100,000.000,000
Un billón..................	$1\overset{2}{.}000{,}000.000{,}000$
Diez billones............	10.000,000.000,000

Como se habrá observado, toda cifra representa un orden de unidades 10 veces mayor que la cifra de su derecha. Por tanto, si á una cifra se le agrega un cero á la derecha, su valor se hace diez veces mayor, si se le agregan dos ceros se hará cien veces mayor, y así sucesivamente; pero el valor *de una cifra* no se altera cuando se le escriben ó se suprimen ceros ó cifras significativas á su izquierda.

13.—En resumen, *las convenciones del sistema de numeración son: que con diez unidades de un orden cualquiera se forma siempre una unidad del orden inmediato superior; que la reunión de los seis primeros órdenes de unidades forman la clase mayor de los millones; que la reunión de los seis órdenes de unidades de millón, forman la clase de los billones; que la reunión de los seis órdenes de unidades de billón, forman la clase de los trillones, etc.; que con el conjunto de los tres primeros órdenes de unidades de cada clase mayor se constituye la clase menor de los millares; y que el número de unidades de cualquier orden se representa por las mismas cifras, escribiendo en el primer lugar de la derecha las unidades, en el segundo las decenas, en el tercero las centenas, etc.*

14.—Las convenciones especiales de la numeración hablada son: 1°, *no dar nombres simples sino á los números de uno á quince, á las decenas, á cien, á quinientos, á mil, al millón, al billón, al trillón, etc.;* y 2°, *en formar el nombre de cualquier número combinando los de sus partes, comenzando por los órdenes de unidades superiores, enunciando sucesivamente el nombre del número de unidades de cada orden y en seguida el nombre de la clase ó del orden de unidades.*

15.—Las convenciones de la numeración escrita son: 1°, *que á todo guarismo se le dan dos valores; uno propio, que es el que tiene por su figura, y otro relativo, por el lugar que ocupa*; 2°, *que un guarismo cualquiera representa un orden de unidades diez veces mayores que el que está á su derecha*; y 3°, *que para conservar á un guarismo el valor relativo que le corresponde se ocupan con ceros los órdenes de unidades de que carece una cantidad.*

16.—*El cero es el símbolo de la nada* y sirve para ocupar los lugares de los órdenes de unidades de que carece una cantidad.

17.—*Para escribir una cantidad, se comienza por los órdenes y las clases superiores, escribiendo de izquierda á derecha sucesivamente los guarismos que representan las unidades de cada uno de los órdenes de que consta la cantidad, teniendo cuidado de ocupar con ceros los órdenes de que carezca.*

Es conveniente proceder por períodos menores de tres cifras, y en cada período se examina de qué órdenes de unidades consta la cantidad y de cuáles carece. En el lugar de cada uno de los órdenes de unidades de que *conste* la cantidad se escribirá la *cifra significativa* que represente el número de esas unidades, y en el lugar de cada uno de los órdenes de unidades de que *carezca* la cantidad se pondrá *cero.*

18.—Regla para leer una cantidad.—*Contando de derecha á izquierda, se divide el número propuesto en períodos mayores de seis cifras cada uno, que se señalan con un punto y con un número pequeño de orden que se pone arriba. En seguida cada período mayor se divide por medio de una coma en dos menores de tres guarismos. El primer período mayor de la derecha representa unidades simples, el segundo millones, el tercero billones, el cuarto trillones, etc.*

Una vez hecha la división de la cantidad, se empieza á leer por la izquierda, enunciando sucesivamente el nombre de cada cifra unido al del orden ó al de la clase que representa, pasando en silencio los órdenes que estén ocupados por ceros; al fin de cada período menor, marcado con una coma, se pronuncia mil; y al fin de cada período mayor se dice unidades, ó millones, ó billones, etc., según sea la clase indicada por el pequeño número puesto arriba.

El siguiente ejemplo aclarará esta regla:

7	$2\overset{2}{.}$	3	0	5,	4	0	$0\overset{1}{.}$	8	7	0,	3	6	2
decenas de billón	billones	centenas de millares de millón	decenas de millares de millón	millares de millón	centenas de millón	decenas de millón	millones	centenas de millar	decenas de millar	millares	centenas	decenas	unidades

Esta cantidad se lee: setenta y dos billones, trescientos cinco mil, cuatrocientos millones, ochocientos setenta mil, trescientas sesenta y dos unidades.

19.—En el conjunto de convenciones que hemos explicado consiste el sistema de nomenclatura y escritura de los números. En la numeración hablada se tiene la doble ventaja de que la lista de los nombres empleados, aunque diferentes todos entre sí, se forma fácilmente con la combinación de un corto número de palabras, y de que se puede tener una idea exacta del valor de un número por el significado de las voces simples empleadas para denominarlo.

En la numeración escrita, como habrá podido observarse, si se comienza á contar de derecha á izquierda, el lugar de cada guarismo indica el orden de las unidades que representa: así las unidades simples ó unidades de primer orden ocupan el primer lugar; las decenas, que se colocan en el segundo lugar, representan unidades de segundo orden; las centenas, que están en el tercer lugar, representan unidades de tercer orden, y así sucesivamente. De esto resulta que el orden de unidades que representa un guarismo cualquiera, vale diez, cien, mil, etc., unidades del orden del guarismo que está respectivamente uno, dos, tres, etc., lugares á la derecha después que él. Por ejemplo, el millón vale diez centenas de millar, que es el orden de unidades que se escribe un lugar á la derecha; vale 100 decenas de millar que se escriben dos lugares á la derecha de los millones; vale mil millares que se escriben tres lugares á la derecha de los millones, etc.

Los números enteros forman una serie creciente, en la que la diferencia entre los números consecutivos es constantemente la unidad, estando expresado el valor de un número por el orden del lugar que ocupa en dicha serie. Así, por ejemplo, el número 725 indica el resultado de la adición sucesiva de 725 unidades de una en una, y su valor marca el orden del lugar que ocupa en la escala ascendente de los números enteros. Si nos fijamos en las voces simples con que componemos el nombre del número 725 y en los guarismos con que lo representamos, esto nos indicará otro modo de formación del número 725, igual á la suma de varios grupos de unidades de diversos órdenes cuya base es 10; así, 725 se compone de 7 cientos, más 2 dieces, más 5 unidades.

Por último, el sistema de convenciones de nuestra numeración, además de satisfacer bastante bien el objeto de denominar con pocas palabras y de escribir con solo diez caracteres todos los números posibles, presenta la gran ventaja de que puedan efectuarse las operaciones numéricas con suma facilidad, como veremos más adelante, en virtud de que las convenciones adoptadas carecen de excepciones, y de que son sencillas y adecuadas á su objeto.

Nuestro sistema de numeración se llama *décuplo* ó *decimal*, porque *diez* es la base que ha servido para formarlo.

20.—Si á un número se le agrega uno, dos, tres, etc., ceros á la derecha, el valor de este número se hará 10, 100, 1000 veces mayor, porque conforme á las convenciones del sistema de numeración, cada guarismo ocupará el lugar de las unidades de segundo, tercero, cuarto, etc., orden superior, al que tenía antes: esto es, unidades superiores que tienen un valor 10, 100, 1000 veces mayor que el primitivo. Por ejemplo, si á 45 se le agregan dos ceros á la derecha, resultará el número 4500; y se vé que el 5, que primero representaba unidades, ahora representa centenas, que es un orden 100 veces mayor que el de las unidades simples, y el 4 que antes representaba decenas, ahora representa millares que son 100 veces mayores que las decenas; luego habiéndose hecho 100 veces mayores todas las partes de 45, el número 4500 será cien veces mayor que 45.

La supresión de uno, dos ó tres ceros á la derecha de una cantidad, hace el valor de ésta 10, 100, 1000, etc., veces menor.

Si se quiere determinar el número de unidades de cierto orden, contenidas en un número, bastará separar las cifras que indican las unidades cuyo orden se quiere conocer, y leer las que quedan á la izquierda. Así, el número 734568 encierra 73456 decenas y 8 unidades, ó 7345 centenas y 68 unidades, ó 734 millares y 568 unidades, etc.

La adición de ceros á la izquierda de un número no altera su valor, porque tanto el valor relativo como el absoluto de los guarismos que lo representan permanece el mismo.

CALCULO DE LOS NUMEROS ENTEROS.

PRELIMINARES.

21.—*El cálculo en aritmética enseña á hacer ciertas operaciones con los números, á fin de formar del modo más sencillo otros números que satisfagan determinadas condiciones.*

El cálculo es *mental* cuando se concibe una operación en el entendimiento y no se practica; *escrito* cuando se representa lo que se ha concebido; y *oral* cuando se expresa lo concebido ó escrito.

22.—El cálculo comprende un gran número de operaciones compuestas, pero las simples y fundamentales son cuatro: *la adición, la substracción, la multiplicación y la división. Para indicar las operaciones hechas ó por hacer, nos servimos de ciertas señales que se llaman signos.*

La *adición* tiene por objeto reunir en un número el valor de varios. Se le indica con el signo + llamado más, el cual se coloca entre las cantidades que se quieran sumar, y el resultado se llama suma. Cuando se quiere sumar 3 con 4, y se obtiene el resultado 7, la operación se indica así:

$3+4=7$, y se lee: 3 más 4 igual á 7.

Con el signo $=$ que se llama igual, se forma una ecuación, indicando una operación y el resultado de ella: $3+4$ es el primer miembro de la ecuación, y 7 el segundo miembro.

Ecuación es la expresión de la igualdad del valor de dos cantidades, formadas generalmente de un modo diferente.

La operación recíproca de la adición se llama *substracción*. Cuando se quiere saber cuál es el número que reunido con 3 forma la suma 7, la operación es una substracción: se indica $7-3=4$, y se lee 7 menos 3 igual á 4.

Cuando todas las cantidades que se han de sumar son iguales, como cuando se tiene $3+3+3+3=12$, la operación se llama *multiplicación*; y en vez de repetir cuatro veces el número 3, la operación se indica $3\times4=12$ y se lee: 3 multiplicado por 4 igual á 12.

Cuando se quiere saber cuál es el número que multiplicado por 3 produce 12, la operación es una división. Se indica de este modo $\frac{12}{3}$, ó $12\div3=4$, y se lee: 12 dividido por 3 igual á 4.

El objeto de toda operación aritmética es encontrar un número desconocido engendrado por los conocidos de un modo peculiar en cada operación. Toda proposición, así como el resultado de cualquiera operación aritmética, es casi siempre el enunciado del modo de formación de un número.

23.—Además de los signos $+$, $-$, $\times$, $\div$, é $=$, se emplea *un punto* para indicar la multiplicación y *dos puntos* para indicar la división. Cuando dos cantidades no son iguales se usa el signo $>$ *(mayor que)*; poniendo la cantidad mayor del lado de la abertura.

$9>4$ se lee: 9 mayor que 4, y $3<5$ se lee 3 menor que 5.

Cuando se tiene que ejecutar una operación con varias cantidades, se colocan éstas dentro de un paréntesis. Así $(3+4-5)\times(3+8)$ significa que el resultado de $3+4-5$ se ha de multiplicar por el de $3+8$.

Ya hemos dicho que signos son las señales con que se indican las operaciones hechas ó por hacer, y en el cálculo los signos son en extremo útiles porque expresan con claridad y precisión las operaciones que hay que ejecutar y las relaciones que existen entre las cantidades sobre las cuales debemos fundar nuestros raciocinios.

24.—En las operaciones fundamentales consideraremos ocho cosas:

1.ª *Definición*, ó qué cosa es la operación.

2.ª *Regla general*, ó cómo se ejecuta la operación.

3.ª *Demostración de la regla general*, ó por qué se ejecuta así la operación.

4.ª *Ejemplo*, ó aplicación de la operación.

5.ª *Prueba*, ó rectificación de la ejecución de la operación.

6.ª *Casos*, ó maneras de presentarse los datos de una operación.

7.ª *Demostración de las reglas para resolver los casos*, y

8.ª *Usos*, ó en qué clase de cuestiones se debe aplicar la operación.

25.—*Definición es la enunciación clara y concisa de las propiedades necesarias para dar á conocer la cosa que expresamos por una palabra, de manera que se distinga de cualquiera otra cosa.*

La definición para ser buena ha de ser *clara*, *corta* y no debe emplearse en ella la palabra que se trata de definir.

26.—*Regla general es un discurso que nos prescribe las operaciones auxiliares que debemos efectuar y el orden de ellas para resolver la operación principal.*

Las reglas son: generales ó particulares, preparatorias ó resolutivas.

27.—*Demostración es el razonamiento que se hace para inferir una verdad de otras, ó para persuadirnos de que un principio es cierto.*

La demostración puede ser: 1.º *Positiva* ó directa: 2.º *Negativa* ó indirecta, á la que también se llama *por absurdo*.

Demostración positiva es aquella en la que el teorema por demostrar resulta como consecuencia de otros principios admitidos ó demostrados ya, y á esto se llama en general deducción.

Negativa es aquella que nos hace ver, que de no ser cierta la verdad que trata de demostrarse, resultaría cierto un principio incompatible con los que hemos admitido ó demostrado.

La demostración negativa no siempre es matemática, por lo que sólo debe usarse en casos especiales y con la mayor circunspección.

En las demostraciones directas se pasa de una afirmación á otra; en las negativas partimos generalmente de una negación para llegar á una afirmación.

28.—*Prueba ó comprobación es una segunda operación por medio de la cual rectificamos la primera, haciéndonos ver que probablemente no se ha cometido ningún error en su ejecución.*

La prueba debe ser de más fácil ejecución que la operación que se va á rectificar, con el objeto de que sea menos probable cometer en ella una equivocación.

No se debe confundir la demostración con la prueba.

La primera es una operación intelectual, mientras que la prueba es una operación mecánica. *La demostración* nos da la razón ó fundamento que hay para efectuar de cierta manera *todas las operaciones semejantes*; mientras que la *prueba* sólo nos sirve para adquirir la probabilidad ó certeza de que no se ha cometido error en la ejecución de *una operación particular*. La demostración es el fundamento de un principio ó de una regla general aplicable á un número indefinido de casos: la prueba nada más rectifica ó comprueba la exactitud de un sólo resultado.

29.—*Casos son las diferentes maneras de presentarse los datos de una operación. Se llaman datos, las cantidades y condiciones conocidas en una operación ó cuestión.* Los casos se distinguen con el objeto de facilitar la ejecución de las operaciones á que pertenecen, pudiendo resolverse de un modo más fácil y sencillo que por el método prescrito en la regla general.

30.—Usos.—Con el objeto de facilitar la resolución de los problemas numéricos se determinan de una manera general las clases de cuestiones que con cada una de las operaciones fundamentales pueden resolverse, atendiendo al modo peculiar con que en cada una de ellas se forma el resultado.

Usos de una operación son las clases de cuestiones á cuya resolución puede aplicarse.

31.—*Problema es una cuestión en la que por medio de cantidades conocidas, se trata de encontrar una desconocida que satisfaga determinadas condiciones.* A las cantidades y condiciones conocidas, se les llama *datos*, y á las cantidades desconocidas se les llama *incógnitas.*

Un problema consta de dos partes: *resolución y demostración.* Resolución es la série de operaciones que se efectúan con las cantidades conocidas para llegar á determinar la desconocida. Cuando la resolución se hace con números, se llama aritmética, y cuando se ejecuta por medio de figuras ó instrumentos, se llama gráfica. La demostración de un problema es la série de razonamientos en que se funda su resolución.

32.—Axiomas.—Los principios que sirven de base á las matemáticas tienen que ser evidentes, porque de lo contrario habría necesidad de buscar otros en que apoyar su demostración. Los principales axiomas de que haremos uso en aritmética, son los siguientes:

Dos cantidades iguales á una tercera, son iguales entre sí.

Una cantidad es igual á la reunión de sus partes.

Si á cantidades iguales se agregan ó quitan cantidades iguales, los resultados serán iguales.

Si con todas las partes de una cantidad se ejecuta una operación, el resultado es igual al que se obtendría ejecutando la operación con toda la cantidad.

Si con cantidades iguales se ejecutan las mismas operaciones, los resultados serán iguales.

ADICION DE LOS NUMEROS ENTEROS.

33.—Cuando se nos dan, por ejemplo, tres cantidades, que constan: la primera de 2 unidades, la segunda de 4 y la tercera de 5, teniendo necesidad de averiguar el valor de un número, compuesto él sólo de tantas unidades como son las que tienen las tres cantidades dadas, la operación es una *suma* que se indica:

$$2+4+5=11$$

y se lee, 2 más 4 más 5 igual á 11.

Las cantidades que se suman, 2, 4 y 5 en este ejemplo, se llaman sumandos, y el resultado 11 de la operación se llama *suma.*

Es condición indispensable *para que las cantidades puedan sumarse que sean de la misma especie.* Si por ejemplo, quisieran sumarse 2 pesos, con 4 horas y con 5 leguas no se sabría de qué especie sería el resultado, y se comprende además que éste no podría ser un *número*, supuesto que todo número es el conjunto de unidades de la misma especie.

34.—Definición.—*Adición es la operación que tiene por objeto reunir en una sola cantidad el valor de varias de la misma especie.*

También puede decirse, que en aritmética *la adición tiene por objeto encontrar un número compuesto de tantas unidades como son las unidades de que constan dos ó más.*

35.—Teorema.—*El valor de la suma no se altera cuando se invierte el orden de los sumandos.*

Si $3+4+2=9$

decimos que $2+3+4$ será también igual á 9.

Demostración.—Como la suma debe constar de tantas unidades como sean las que tengan los sumandos y como cuando se invierte el orden de éstos no se altera el número de unidades de que constan, se infiere que el valor de la suma no se altera cuando se invierte el orden de los sumandos.

36.—*Si á uno de los sumandos se agrega una cantidad, la suma resultará aumentada la misma cantidad.*

Si sabemos que $4+5+3=12$
y que $6=2+4$

vamos á demostrar que $6+5+3$ será igual á $2+12$.

En efecto, reemplazando por 6 su igual $2+4$ se tiene:

$$6+5+3=2+4+5+3$$

y como $4+5+3=12$
resulta $6+5+3=2+12$

que es lo que se quería demostrar.

Recíprocamente: *si á uno de los sumandos se le quita una cantidad, la suma resultará disminuida la misma cantidad.*

Si sabemos que $6+5+3=14$
y que $4=6-2$

demostraremos que $4+5+3$ será igual á $14-2$

En efecto, reemplazando por 4 su igual $6-2$ se tiene:

$$4+5+3=6-2+5+3=6+5+3-2$$

y como $6+5+3=14$
resulta: $4+5+3=14-2$

que es lo que se quería demostrar.

Se ve, pues, que *la suma experimenta variaciones iguales á las que tenga uno de los sumandos.*

37.—Teorema.— *La suma no se altera cuando á uno de los sumandos se le agrega una cantidad y á otro se le quita la misma cantidad.*

Si se sabe que $3+4+7=14$
agregando 5 unidades al primer sumando y quitando 5 unidades al último, la operación se cambia en

$$8+4+2,$$

y vamos á demostrar que el resultado deberá ser igual al anterior.

En efecto, si sólo hubiéramos agregado 5 unidades al primer sumando, la suma 14 habría resultado aumentada 5 unidades; pero como al quitar 5 unidades al último sumando la suma resulta disminuida también 5 unidades, se infiere que aumentando por una operación tanto como se disminuye por la otra, la suma no alterará.

38.—Para ejecutar la operación de la suma, el método natural está fundado en el último teorema. Cuando se quiere sumar 4 con 3, se va quitando una unidad á un sumando y agregándola al otro sucesivamente, hasta que desaparece el menor, de la manera siguiente:

$$4+3=5+2=6+1=7, \text{ luego } 4+3=7$$

Este método sería excesivamente laborioso y dilatado para cantidades de gran valor, y por esto la adición de las unidades con cualquier número se hace á la memoria. Además, para más facilitar la ejecución de la adición, se hace ésta descomponiendo las cantidades por sumar en las partes de que están formadas, según el sistema de numeración, esto es, en unidades, decenas, centenas, etc.

Si tenemos que sumar 345 con 684, la operación abreviada de la práctica debe concebirse como sigue:

$345=300+40+5$ que son las partes que lo forman, y
$684=600+80+4$

Sumando las unidades del mismo orden resulta:

$$345+684=900+120+9=900+100+20+9=1,000+20+9=1029$$

Reduciéndose así la operación á tener que sumar números de un solo guarismo.

En lo expuesto se funda la siguiente:

39.—Regla general.— *Para sumar los números enteros, se escriben unos debajo de otros, teniendo cuidado de colocar en una columna vertical las unidades del mismo orden; esto es: las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, las centenas debajo de las centenas, etc. Después se tira por debajo del último sumando una linea horizontal para separar el resultado, y se comienza la suma por las unidades de especie menor: si ésta no pasa de 9, se escribe debajo; pero si excede de 9, se escriben las unidades y el número de decenas se reune á los guarismos de la columna siguiente de las decenas, repitiéndose en esta columna, en la de las centenas, y en las siguientes, la misma regla; pero en la última columna de la izquierda se escribe el resultado tal como salga. El número encontrado será la suma total.*

40.—Ejemplo.—Sea por sumar las cantidades 386, 459 y 908. Se escriben de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r} 386 \\ 459 \\ 908 \\ \hline 1753 \end{array}$$

La operación se ejecuta comenzando á sumar los números de la columna de la derecha, la cual da 23 unidades, igual á 3 unidades simples y 2 decenas. Se pone 3 en el lugar de las unidades y se retienen en la memoria las 2 decenas para agregarlas á los números de la segunda columna, que son los que representan decenas, cuya suma nos da 15 decenas, igual á 5 decenas y una centena. Se escribe 5 en el lugar correspondiente, y se agrega una centena á las demás centenas, cuya suma 17 se escribe en el lugar correspondiente, siendo 1753 unidades la suma total.

El pormenor de las operaciones fundamentales de la regla puede concebirse como sigue:

$$
\begin{array}{r}
386 = 300 + 80 + 6 \\
459 = 400 + 50 + 9 \\
908 = 900 + 00 + 8 \\
\hline
1600 + 130 + 23
\end{array}
$$

23	suma	de las	unidades.	
130	„	„	„	decenas.
1600	„	„	„	centenas.
1753	„	total.		

Y como se comprende fácilmente, la base de este procedimiento es que la suma de todas las partes de los sumandos es igual á la suma de éstos.

41.—Demostración.—1°. Se han sumado las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, las centenas con las centenas, etc., porque *es indispensable que sean de la misma especie las cantidades que se suman.* 2° Se comienza la suma por las unidades de la especie menor, porque *la suma de los números de especie menor conduce á la formación de unidades de orden mayor*, las cuales deben agregarse á las de su especie para tener en la suma representada la reunión de cada orden de unidades por un solo número. 3° Si con todas las partes de varias cantidades se ejecuta una operación, el resultado es igual al que se obtendría ejecutando con las cantidades la misma operación; practicando la regla, hemos reunido en la suma el valor de las unidades, de las decenas, de las centenas, etc., de los sumandos, *que son las partes de éstos*, luego habremos reunido en la suma el valor total de los sumandos.

42.—Prueba.—Siendo la adición la operación más sencilla de aritmética, no hay otra en cuya ejecución sea menos probable una equivocación; por lo cual la adición se prueba por la misma adición, de dos modos: 1° Si la suma se encontró sumando de arriba para abajo, se vuelve á ejecutar la operación sumando de abajo para arriba, y el resultado debe ser igual al primero, *porque el valor de la suma es el mismo, cualquiera que sea el orden de los sumandos.* 2° Se dividen los sumandos, cuando son muchos, en dos ó tres porciones; se hace separadamente

la suma de cada porción; y por último, se adicionan las sumas parciales, debiendo obtenerse una cantidad igual á la primera suma si no ha habido equivocación en la ejecución de la operación ó de la prueba. El fundamento de esta prueba consiste en que *una cantidad es igual á la reunión de sus partes, y las sumas parciales son las partes de que está compuesta la suma total.*

No obstante que esta prueba es operación más larga que la suma, debemos hacer notar que se adopta en la práctica porque es menos probable tener una equivocación en la prueba que en la operación definitiva, descomponiendo esta en operaciones más fáciles, esto es, en sumas que consten de pocos sumandos.

43.—Casos.—En la adición se presentan dos casos: 1° *Cuando los sumandos son desiguales.* 2° *Cuando los sumandos son iguales.*

1° 347+389+ 22
2° 975+975+975

El primer caso se resuelve por la regla general, y el segundo se simplifica mucho valiéndose de la multiplicación, operación que no es en realidad mas que el segundo caso de la suma abreviado.

44.—Usos.—El primer caso tiene los mismos usos á que da lugar el objeto de la suma; esto es, se aplica: cuando se quiere averiguar el total de varios números de la misma especie: cuando se quieran reunir varios valores para formar uno solo: cuando se quiere aumentar una cantidad con el valor de uno ó de varios números, etc.

El segundo caso de la suma tiene dos usos: 1° *Conocido el valor de una unidad, determinar el de muchas.* 2° *Reducir unidades de especie mayor á menor.*

45.—Como ejercicio pondremos los siguientes ejemplos:

345	4 678	936 086	343 266
8 946	309 779	40 700	294 309
9 090	166 405	865 497	903 444
7 746	84 708	304 960	55 767
12 963	14 996	165 744	186 935
904	465 766	75 392	46 747
39 994	1 046 332	2 388 379	1 830 468

Omitimos poner ejemplos del 2° caso de la suma, porque estos se resuelven más facilmente por la multiplicación.

SUBSTRACCION DE LOS NUMEROS ENTEROS.

46.—La substracción es una operación recíproca de la adición. Cuando se suman 3 y 4, se pide cuál es el valor del conjunto de las unidades contenidas en los dos números conocidos. En la substracción es conocido el resultado 7 de la suma y uno de los números que la forman, 3 por ejemplo, y se trata de determinar cuál es el número que sumado con 3 forma 7.

Esta operación se indica con el signo — *menos*, así:

$$7-3=4.$$

y se lee: 7, menos 3, igual á 4.

Se llama diferencia lo que le falta ó sobra á una cantidad para ser igual á otra, y en consecuencia lo mismo es encontrar la diferencia entre dos cantidades, que hallar un número que, sumado con el menor, forme el mayor.

Es condición indispensable que las cantidades que se restan sean de la misma especie, porque ambas tienen que ser de la especie de la diferencia que se busca.

La *cantidad mayor*, esto es, aquella de la que se tiene que restar la otra conocida, *se llama minuendo.* La *cantidad menor*, que es la que se ha de restar, *se llama substraendo*, y el resultado de la operación, *se denomina resta, exceso ó diferencia.*

47.—Def.—*Substracción es la operación que tiene por objeto encontrar la diferencia entre dos cantidades homogéneas.*

Puede decirse igualmente, *que la substracción es la operación por medio de la cual se encuentra una cantidad, que sumada con otra conocida forma un número propuesto.*

48.—Teorema.—*Cuando al minuendo se le agrega una cantidad, la resta resulta aumentada el mismo número de unidades; y si se le quita, la resta resultará disminuida la misma cantidad.*

Hemos dicho que la substracción tiene por objeto encontrar un número que sumado con el substraendo dé por suma el minuendo; pues bien, si al minuendo le agregamos una cantidad será forzoso que uno de los dos sumandos que lo forman aumente la misma cantidad, (36) y como suponemos que el substraendo permanece constante, será necesario

que la resta, que es el otro sumando, resulte aumentada el mismo número de unidades que se hayan agregado al minuendo.

Cuando al minuendo se le quita una cantidad es forzoso que uno de los dos sumandos que lo forman disminuya la misma cantidad (36), y como el substraendo no cambia, es indispensable que la resta, que es el otro sumando, resulte disminuida el mismo número de unidades que se hayan quitado al minuendo.

49.—Teorema.—*Cuando al substraendo se le agrega una cantidad, la resta resultará disminuida la misma cantidad, y cuando al substraendo se le quita una cantidad, la resta resultará aumentada.*

Cuando se agregue un número al substraendo, esto menos le faltará para ser igual al minuendo y como la resta debe expresar lo que le falta al substraendo para ser igual al minuendo, se infiere que resultará disminuida la cantidad que se haya agregado al substraendo. Cuando se quite al substraendo una cantidad eso más le faltará para ser igual al minuendo, y por consiguiente la resta resultará aumentada.

50.—Teorema.—*La resta no se altera cuando se agrega ó se quita un mismo número al minuendo y al substraendo.*

Demostración.—Cuando se agrega una cantidad al minuendo, la resta resultará aumentada tantas unidades como tenga la cantidad agregada; pero como cuando se agrega la misma cantidad al substraendo la resta resulta disminuida igual número de unidades; se infiere que la resta habrá aumentado por una operación el mismo número de unidades que ha disminuido por la otra, razón por la cual no sufre ninguna alteración.

Igualmente, cuando se quita una cantidad al minuendo, la resta disminuye; pero como cuando se le quita la misma cantidad al substraendo la resta aumenta tanto como había disminuido; resulta, pues, que no sufrirá alteración.

De esto se infiere el principio general de que *la diferencia entre dos cantidades no se altera cuando á ambas se les agregan ó quitan cantidades iguales.*

51.—El método natural para ejecutar la substracción, está fundado en el último teorema. Cuando queremos averiguar la diferencia, por ejemplo, entre 9 y 4, se va quitando sucesivamente una unidad al minuendo y al substraendo hasta que éste se reduzca á 0, del modo siguiente:

$$9-4=8-3=7-2=6-1=5; \text{ luego } 9-4=5.$$

Como este método sería muy dilatado, es preciso conocer de memoria la diferencia entre los números menores que 20 y las unidades. Esta diferencia se deduce del valor de la suma, pues sabiendo que $4+5=9$

se infiere que 5 es la diferencia entre 9 y 4. Una vez que se conoce de memoria la diferencia entre las unidades y los números inferiores á 20, la substracción puede ejecutarse fácilmente descomponiendo los números por restar en unidades, decenas, centenas, millares, etc. Si queremos restar 543 de 796, la operación abreviada que se hace en la práctica, debe concebirse como sigue:

$$796=700+90+6$$

Menos $543=500+40+3$ restando las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, etc. resulta que

$$796-543=200+50+3=253.$$

Puede suceder que alguno de los números del substraendo sea mayor que el correspondiente del minuendo del cual deba restarse. Para comprender lo que se hace en este caso, es necesario recordar que el minuendo es igual á la suma del substraendo con la resta. Si se tiene que restar, por ejemplo, 338 de 865, la operación se dispondrá como antes:

$$\begin{array}{rr} & 865 \\ \text{Menos} & 338 \\ \hline & 527 \end{array}$$

pero siendo 8 unidades mayor que 5, se tiene que buscar un número que sumado con 8 forme, no ya 5, sino 15 unidades. Este número es 7, y como cuando sumamos 8 con 7 ponemos las unidades en el lugar correspondiente y agregamos una decena á las decenas de los sumandos; en el caso actual, la decena comprendida en 15 unidades, suma de 8 con 7, formará parte de las decenas del substraendo que sumadas con la resta han de formar 6 decenas del minuendo. En consecuencia, tendremos que buscar el número que agregado, no á 3 decenas del substraendo, sino á 4, forme 6 decenas del minuendo, el cual es 2; y por esto, cuando alguna cifra del substraendo es mayor que la correspondiente del minuendo, se le agrega á ésta 10 unidades del orden que representa, y al número que sigue á la izquierda de la cifra del substraendo se le agrega una unidad para restarla de la correspondiente del minuendo.

De estas consideraciones se deduce la siguiente:

52.—Regla general.—*Para restar los números enteros se coloca el menor debajo del mayor, teniendo cuidado de que queden las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, las centenas debajo de las centenas, etc. Después se tira una linea horizontal, debajo de la cua se escribe el resultado. En seguida se restan las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, etc., y la diferencia se escribe en la columna correspondiente, repitiéndose la misma operación en cada columna hasta la última de la izquierda.*

Cuando alguno de los guarismos del substraendo es mayor que el correspondiente del minuendo, se agregan á éste 10 unidades de su orden, y de la suma se resta la cifra inferior, teniendo cuidado, al continuar la resta, de agregar á la cifra del substraendo que sigue inmediatamente á la izquierda una unidad.

53.—Ejemplo.—Se quiere restar de 87.400,538, el número 60,304,365.

$$\begin{array}{r} 87\ 400\ 538 \\ -60\ 304\ 365 \\ \hline 27\ 096\ 173 \end{array}$$

Se comienza la operación por la derecha diciendo: de 5 á 8, la diferencia es 3: la cual se escribe en el lugar de las unidades. Como 6 decenas es mayor que 3, se le agregan 10 á la cifra del minuendo, y se dice: de 6 á 13, la diferencia es 7, que se escribe; y va 1, que se agrega á las centenas: 1 y 3 son 4, á 5, la diferencia es 1, que se escribe debajo de las centenas. La operación se sigue así: de 4 á 10, 6; y va 1, á 10, 9; y va 1, y 3 son 4, á 4, 0; de 0 á 7, 7; y por último, de 6 á 8, 2. La diferencia ó resta total, es: 27 096 173. (*)

54.—Demostracion.—1° Se han restado las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, las centenas de las centenas, etc., porque *es necesario que sean de la misma especie las cantidades que se restan.* 2° Cuando un guarismo del minuendo es menor que el correspondiente del substraendo y se ejecuta la regla dada para este caso, la resta no sufrirá alteración supuesto que se *han agregado 10 unidades del mismo orden al minuendo y al substraendo* (50). 3° Si con todas las partes de dos cantidades se ejecuta una operación, el resultado es igual al que se obtendría ejecutando con las cantidades la misma operación; practicando la regla hemos encontrado la diferencia entre las unidades, entre las decenas, entre las centenas, etc., del substraendo y del minuendo, que *son las partes de que se componen,* luego habremos encontrado la diferencia entre el substraendo y el minuendo.

(*) Este procedimiento es preferible al de pedir una unidad prestada al guarismo siguiente del minuendo: 1° porque es más sencillo; 2° porque sin ninguna variación es aplicable al caso de que haya ceros; y 3° porque es exactamente el que se emplea para hacer la resta en la división de enteros, como puede verse dividiendo 87.400,538 entre 60.304, 365 y fijándose en la manera de determinar la resta.

55.—Prueba.—La substracción se prueba sumando el substraendo con la resta, y si no ha habido error, la suma debe ser igual al minuendo, porque la resta expresa la cantidad que le falta al substraendo para ser igual al minuendo.

56.—Casos.—Los casos de la substracción, son dos: 1° *Cuando hay que restar una cantidad de otra una sola vez.* 2° *Cuando una cantidad se debe restar de otra cuantas veces sea posible.*

Primer caso 445—387=58

Segundo caso, restar 151 de 453 cuantas veces se pueda.

$$\begin{array}{r} 453 \\ -151 \\ \hline 302 \\ -151 \\ \hline 151 \\ -151 \\ \hline 000 \end{array}$$

000 luego 453 es igual á 3 veces 151.

Como habrá podido observarse, estos dos casos son distintos, no porque sean diferentes los valores numéricos del minuendo y del substraendo, sino por *ser diversa la condición* de restar una cantidad de otra *una sola vez*, de la de restarla *cuantas veces sea posible.*

El primer caso se resuelve por la regla general, y la ejecución del segundo se facilita mucho por medio de la división, operación que no es más que el segundo caso de la substracción abreviado.

57.—Usos.—El primer caso tiene los usos á que da lugar el objeto de la operación, por lo que se emplea; primero, cuando se quiere conocer la diferencia entre dos cantidades; segundo, cuando se quiere encontrar un número que sumado con otro conocido, forme una cantidad propuesta, lo que equivale á hallar el *exceso* de un número sobre otro: y tercero, cuando se quiere quitar á un número el valor de otro: que es propiamente *restarlo.*

El segundo caso de la substracción tiene cuatro usos:

1° *Ver cuántas veces un número contiene á otro:* 2° *Reducir unidades de especie menor á mayor.* 3° *Conocido el valor de muchas unidades y el número de ellas, determinar el valor de una unidad.* 4° *Conocido el valor de muchas unidades y el de una sola, determinar el número de ellas.*

58.—Para ejercicio pondremos los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{r} 84\ 367\ 965 \\ -37\ 478\ 704 \\ \hline 46\ 889\ 261 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30\ 409\ 700 \\ -15\ 700\ 967 \\ \hline 14\ 708\ 733 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45\ 000\ 040 \\ -12\ 673\ 436 \\ \hline 32\ 326\ 604 \end{array}$$

Omitimos poner ejemplos de los usos del 2° caso, porque éstos se resuelven con más facilidad por medio de la división.

MULTIPLICACION DE LOS NUMEROS ENTEROS.

59.—Ya hemos dicho en el párrafo 43, que cuando en la suma los sumandos son iguales, la operación se facilita por medio de la multiplicación, operación que es en realidad el segundo caso de la suma abreviado.

Cuando queremos sumar, por ejemplo, 16 cinco veces, esto es:

$$16+16+16+16+16=80;$$

esto equivale á buscar un valor igual á cinco veces 16, ó á encontrar una cantidad 5 veces mayor que 16. Tal es el objeto de la multiplicación.

La operación se indica con el signo $\times$ multiplicado por, ó por medio de un punto puesto entre las dos cantidades.

$$16\times5=80,\ ó\ 16.5=80.$$

Se lee 16 multiplicado por 5 igual á 80.

La cantidad que se había de sumar se llama *multiplicando;* la que indica el número de veces que se había de sumar, se llama *multiplicador,* y el resultado *producto.* Al multiplicando y al multiplicador juntos se les llama *factores del producto.*

El producto es de la misma especie que el multiplicando; y el multiplicador, que en rigor puede considerarse como número abstracto, es las más veces de una especie diferente de la del multiplicando.

Definición.—*La multiplicación de los números enteros es la operación por medio de la cual se suma ó se toma un número tantas veces como unidades hay en otro.*

El objeto de la multiplicación es formar una cantidad que tenga con un número dado la misma relación que otro tiene con la unidad.

60.—PRIMER TEOREMA—*El valor del producto de dos cantidades, no se altera cuando se invierte el orden de los factores.*

Esto es: $$3\times5=5\times3$$

DEMOSTRACIÓN.—Cuando los factores son dos, se puede descomponer el multiplicando en las unidades que lo forman y después multiplicarlas por el multiplicador, con lo cual se obtiene por resultado el multiplicador repetido ó sumado tantas veces como unidades hay en el multiplicando.

Así $$5\times3=(1+1+1+1+1)\times3$$

ejecutando la multiplicación se obtiene

$$5\times3=3+3+3+3+3=3\times5$$

luego $$5\times3=3\times5$$

En el caso de que tengamos formado un producto por tres factores, por ejemplo,

$$3\times5\times7=105$$

demostraremos que el primer factor 3 puede ocupar el segundo ó el tercer lugar sin que se altere el valor del producto.

Como $$3\times5=5\times3$$

se infiere que $$3\times5\times7=5\times3\times7 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Como $$3\times7=7\times3$$

se infiere que $$3\times5\times7=5\times7\times3 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

luego $$3\times5\times7=5\times3\times7=5\times7\times3$$

61.—SEGUNDO TEOREMA.—*Si se hace á uno de los factores cierto número de veces mayor, el producto resultará igual número de veces mayor.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $6\times4=24$. Si á 6 lo hacemos tres veces mayor, la operación se cambiará en

$$18\times4=72$$

y tendremos que demostrar que 18×4 es igual á 24×3.

Como $18=6\times3$, tendremos:

$$18\times4=6\times3\times4$$

invirtiendo el orden de los factores se tiene·

$$18\times4=6\times4\times3$$

y como $6\times4=24$, finalmente resulta:

$$18\times4=24\times3$$

que es lo que se quería demostrar.

Ahora, como el valor del producto no se altera tomando por multiplicando el multiplicador, resulta que el principio es cierto para cualquiera de los factores.

62.—TERCER TEOREMA.—*Si se hace á uno de los factores cierto número de veces menor, el producto resultará el mismo número de veces menor.*

DEMOSTRACIÓN.—Si sabemos que

$$15\times4=60$$

y hacemos á uno de los factores, 15, por ejemplo, 3 veces menor,

decimos que $$5\times4=20$$

será 3 veces menor que 60.

En efecto, por ser 15 *tres* veces mayor que el factor 5, el producto, 60, conforme al teorema anterior, será *tres* veces mayor que 20, y en consecuencia

5×4 será *tres* veces menor que 15×4

que es lo que se quería demostrar.

De lo expuesto resulta que *el producto experimentará variaciones semejantes á las que tenga cualquiera de los factores.*

63.—CUARTO TEOREMA.—*El producto de dos factores no se altera cuando uno de ellos se aumenta, y el otro se disminuye el mismo número de veces.*

DEMOSTRACIÓN.—Cuando se aumenta uno de los factores, el producto se hace cierto número de veces mayor, pero como cuando se disminuye igual número de veces el otro factor, se hace el producto menor tanto como antes se hizo mayor, resulta que hay perfecta compensación quedando el producto con igual valor.

64.—QUINTO TEOREMA.—*Toda cantidad multiplicada por 1 da por producto la misma cantidad.*

Demostración.—Porque como cuando el multiplicador es la unidad, esto indica que el multiplicando se ha de tomar ó sumar una vez para obtener el resultado, naturalmente éste, que es el producto, será igual al multiplicando.

65.—Sexto teorema.—*Toda cantidad multiplicada por cero da cero por producto.*

Demostración.—Como el valor del producto no se altera cuando se invierte el orden de los factores (60), se tendrá, por ejemplo que

$$16\times 0=0\times 16$$

Ahora bien, como si se suma 0 diez y seis veces consigo mismo el resultado es 0,

tendremos $0\times 16=0$

luego $16\times 0=0$

que es lo que se debía demostrar; y como el raciocinio hecho con 16 es aplicable á cualquier número, resulta que toda cantidad multiplicada por cero dará cero por producto.

Debe notarse que cuando se multiplica una cantidad por 1 ó por 0 el producto no es mayor que cualquiera de los factores. La multiplicación, según hemos dicho, es una operación por medio de la cual se obtiene un resultado que tiene con una cantidad conocida (con el multiplicando), la misma relación que otra cantidad (el multiplicador), tiene con la unidad. Esto explica por qué en matemáticas no siempre produce la multiplicación el aumento que podría atribuírsele por la significación de la palabra en el lenguaje común.

66.—Para ejecutar la multiplicación de dos números de cualquiera magnitud es preciso conocer primero los productos de los guarismos que representan unidades simples, y los cuales se encuentran en la tabla adjunta llamada de Pitágoras. Esta se forma escribiendo en una línea horizontal los 10 primeros números: en seguida, se va sumando cada uno consigo mismo 10 veces, escribiendo cada suma debajo de la anterior en la misma columna vertical. Para formar, por ejemplo, los productos de 5, después de escrito el primer renglón, se sumará 5 con 5 y se escribe 10 debajo: $10+5=15$ que se escribe debajo de 10: $15+5=20$: $20+5=25$, etc., y de este modo se obtienen los productos de 5 por 1, por 2, por 3, por 4, etc.

TABLA DE PITAGORAS.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Si se quiere encontrar, por ejemplo, el producto de 8 por 4 bastará bajar en la columna vertical debajo del 8 hasta la intersección de la línea horizontal de 4, y 32 será el producto de 8 por 4.

Así pues, el producto de dos factores que no pase de 10 puede obtenerse por medio de la tabla, cuando no se conoce á la memoria.

Esta tabla es una nueva demostración de que el producto es el mismo cualquiera que sea el orden de los factores, supuesto que las columnas generadoras de los productos, esto es, la horizontal y la vertical pueden invertirse sin variación del producto. La demostración se concibe que es general dando suficiente extensión á la tabla.

Cuando uno de los factores tiene más de una cifra, se considera éste dividido en unidades, decenas, centenas, etc., y se ejecuta la multiplicación por partes. Para multiplicar, por ejemplo, el número 9,437 por 4, basta considerar la suma que seria necesario efectuar, para comprender el fundamento de la operación. La columna de las unidades contiene el número 7, repetido cuatro veces; luego para encontrar la suma de las unidades bastará mnltiplicar 7 por 4 igual á 28, poner 8 unidades y retener 2 decenas para reunirlas á las de su especie; en la columna compuesta de 3 repetido 4 veces igual á 12, más dos decenas retenidas forman 14; se pone 4 y se retiene una centena para reunirla á las centenas, etc. Hemos representado debajo de la suma la multiplicación, y así se ve que *la operación equivale á multiplicar cada una de las cifras del multiplicando por el multiplicador, comenzando por las de especie menor; cada producto se escribe debajo de la cifra de que procede y se retienen las decenas para reunirlas al producto del guarismo siguiente.*

```
 9 437
 9 437
 9 437
 9 437
------
37 748
------
 9 437
     4
------
37 748
```

Cuando ambos factores constan de más de un guarismo, se descompone el multiplicador en las unidades, decenas, centenas, etc., de que consta: se multiplica el multiplicando por cada una de las partes del multiplicador, y el producto total es igual á la suma de los productos parciales.

Si se quiere, por ejemplo, multiplicar 9,437 por 864, se tendrá que

$$9437\times864=9437\times4+9437\times60+9437\times800$$

y en consecuencia, se multiplicará 9437 por 4, por 60 y por 800 que son las partes del multiplicador y después se sumarán los tres productos. El primero de 9437 por 4=37748 se forma como acaba de explicarse. El de 9437 por 60 se obtiene multiplicando cada una de sus cifras por 6, pero como 60 es 10 veces mayor que 6, se tiene cuidado de que este producto exprese decenas y no unidades, para lo cual se agrega un cero á la derecha del primer producto de 6 por las unidades del multiplicando, á fin de dar al producto parcial el valor que le corresponde. En efecto, 9437 multiplicado por 6 unidades, produce 56622 unidades; pero como lo que se busca es el producto por 60, que es 10 veces mayor que 6 unidades, será necesario hacer el producto 10 veces mayor, lo cual se consigue agregando un cero á la derecha ó colocando este producto en el lugar correspondiente. Para obtener el producto por 800 se multiplican todas las cifras del multiplicando por 8, y se agregan dos ceros á la derecha. Por último, se suman los tres productos parciales para formar el total.

```
   9437
    864
-------
  37748
 566220
7549600
-------
8153568
```

67.—Tales son los fundamentos de la siguiente:

Regla general para multiplicar los enteros.—1º—*Cuando ambos factores tienen un solo guarismo, el producto se obtiene á la memoria ó por la tabla de Pitágoras.*

2º—*Cuando uno de los factores tiene varias cifras y el otro consta de un solo guarismo, se coloca este comunmente debajo del número mayor, se*

tira una línea horizontal para separar el producto, y se comienza á multiplicar cada una de las cifras del factor mayor, comenzando por las unidades, por el guarismo del multiplicador: se escriben las unidades de cada producto en el orden de la cifra del multiplicando de que procede, y las decenas que contenga se reunen al producto de la cifra siguiente, y así se continúa la operación hasta multiplicar el guarismo de mayor especie, cuyo producto se escribe tal como sale.

3º—*Cuando ambos factores tienen varias cifras, se escribe comunmente el menor debajo del mayor, y se tira una línea horizontal para separar los factores de los productos parciales. Conforme á la regla anterior, se forma el producto del multiplicando por las unidades del multiplicador; en seguida se forma el producto del multiplicando por el guarismo de las decenas del multiplicador, escribiendo el primer guarismo de este producto en la columna de las decenas; después se forma el producto del multiplicando por el guarismo de las centenas del multiplicador, escribiendo el primer guarismo en la columna de las centenas, y así se continuará la operación; sumando, por último, los productos parciales.*

68.—Ejemplo.—Sea por multiplicar 72048 por 347. Conforme á la regla, las cantidades se escribirán como se ve al lado. Se multiplicarán por 7 todos los guarismos del multiplicando, comenzando por las unidades, diciendo: 7 por 8, 56; se ponen 6 unidades y se retienen 5 decenas para unirlas al producto de 7 por 4 decenas, son 28, y 5, 33; se escribe 3 y se retienen las 3 decenas; 7 por 0 es 0 y 3 son 3; 7 por 2, 14; se escribe 4 y va 1; 7 por 7, 49 y 1, 50 que se escribe. Después se multiplican todas las cifras del multiplicando por 4 decenas, y como este producto parcial debe expresar decenas, el primer producto de 8 por 4 se escribe en el lugar de las decenas, omitiéndose el 0, que por claridad podría ponerse á la derecha. En seguida se multiplican todas las cifras del multiplicando por 3 centenas, escribiendo el primer producto de 3 por 8 en el lugar de las centenas para que este producto parcial exprese centenas. Por último, se suman los productos parciales para obtener el total.

```
   72048
     347
--------
  504336
 288192
216144
--------
25000656
```

Obsérvese que el producto de los números enteros consta de tantos guarismos como tienen ambos factores juntos ó de uno menos. Para comprender el fundamento de lo cual, basta observar en el ejemplo propuesto, que siendo 347 mayor que 100 y menor que 1000, el producto estará entre los límites 7204800 y 72048000, esto es, constará de tantas cifras como tiene el multiplicando mas dos ó tres guarismos, que es la suma de los dos factores ó una menos.

69.—Demostración de la regla general.—Cuando con todas las partes que constituyen una cantidad se ejecuta una operación, el resultado es el mismo que si se ejecutara la operación con toda la cantidad: practicando la regla hemos multiplicado las unidades, decenas, centenas, etc. del multiplicando, por las unidades, decenas, centenas, etc., del multiplicador, luego habremos obtenido el producto del multiplicando por el multiplicador. Cuando multiplicamos el multiplicando por el guarismo que representa las decenas del multiplicador considerándolo como unidades, el producto parcial resultaría 10 veces menor que el verdadero; pero escribiendo este producto en el lugar de las decenas, le damos el valor que le corresponde, y así obtenemos el verdadero producto del multiplicando por las decenas del multiplicador; continuando la operación conforme á la regla, y escribiendo el producto de las centenas del multiplicador en la columna de las centenas, el producto de los millares en la columna de los millares, etc., haremos que cada producto parcial tenga el valor que debe tener.

70.—Prueba.—Sea por multiplicar 718345 por 867. Después de ejecutar la multiplicación, para hacer la prueba sumamos las cifras del multiplicando:

718345	28,	10,	1	$7+1+8+3+4+5=28$;
867	21		3	
———			—	como 28 contiene decenas, volve-
5028415			3	mos á sumar los guarismos que lo
4310070				forman:
5746760				$2+8=10$: y por último, $1+0=1$
———				que es el resultado final de la su-
622805115	30		3	ma de los guarismos del multipli-

cando. En seguida se suman los guarismos del multiplicador.

$$8+6+7=21, \text{ y } 2+1=3.$$

De igual manera se suman las cifras significativas del producto:

$$6+2+2+8+0+5+1+1+5=30, \text{ y } 3+0=3$$

Ahora formamos el producto de la cifra 1, que resultó del multiplicando por la 3, que provino del multiplicador, y si el producto, 3, resulta igual á la cifra 3, que dió la suma de los guarismos del producto, es prueba de que no se cometió ningún error en la ejecución de la multiplicación.

Definición.—En las pruebas de la multiplicación y de la división de enteros entendemos por *reducir una cantidad á unidades simples, sumar unas con otras todas sus cifras significativas; si la suma, además de unidades consta de decenas, de centenas, etc., se suman entre sí las cifras de la suma, y si fuere necesario, los guarismos de la nueva suma y los de las siguientes hasta obtener como resultado unidades simples.*

Regla.—*Para hacer la prueba de la multiplicación de los números enteros, se reducen á unidades simples el multiplicando, el multiplicador y el producto. Se forma el producto de la cifra que resultó del multiplicando por la del multiplicador, reduciendo si fuese necesario, este pequeño producto á unidades simples; debiendo obtenerse, cuando no ha habido error, un guarismo igual al que resultó de reducir á unidades simples el producto del multiplicando por el multiplicador.*

Nos falta conocer las propiedades de los factores y divisores de los números, que expondremos al fin de enteros, para dar la demostración de esta regla, que puede verse en el párrafo 132.

71.—*Los casos de la multiplicación son siete.*

1°—*Cuando ambos factores tienen un solo guarismo.*

2°—*Cuando uno de los factores tiene un solo guarismo y el otro varios.*

3°—*Cuando ambos factores tienen más de un guarismo.*

4°—*Cuando uno de los factores es la unidad seguida de ceros.*

5°—*Cuando alguno ó ambos factores terminan en ceros.*

6°—*Cuando entre las cifras del multiplicador hay uno ó varios ceros, y*

7°—*Cuando la primera ó la última cifra del multiplicador es la unidad.*

El primer caso se resuelve á la memoria, y el 2° y 3° conforme á la regla general (67).

Cuarto caso.—Cuando uno de los factores es la unidad seguida de ceros, se obtiene el producto agregando al otro factor tantos ceros como son los que acompañan á la unidad, conforme á lo demostrado en el número 20, pues esto equivale á hacer el otro factor 10, 100, 1000, etc., veces mayor.

Quinto caso.—Cuando alguno ó ambos factores terminan en ceros, para obtener el producto se hace abstracción de dichos ceros, se multiplican las cifras significativas por la regla general, y al producto se le agregan tantos ceros, como sean los que tienen los factores.

Demostración.—Cuando se hace abstracción de los ceros con que termina el multiplicando, lo hacemos menor (20), 10, 100, 1000, etc., veces, y en consecuencia, el producto resultará igual número de veces menor (62). Cuando hacemos abstracción de los ceros del multiplicador, hacemos á este factor, y en consecuencia, al produto, cierto número de veces menor. Pero como al agregar al producto tantos ceros á la derecha como hay en ambos factores juntos, lo hacemos tantas veces mayor (20) como antes se había hecho menor al hacer abstracción de los ceros, resulta que restituiremos al producto el valor que le corresponde, por lo cual será el verdadero.

SEXTO CASO.—Cuando entre las cifras del multiplicador hay uno ó varios ceros, para obtener el producto se omite multiplicar el multiplicando por los ceros del multiplicador, teniendo cuidado de colocar la primera cifra significativa de cada producto parcial en la columna del orden de unidades que representa la cifra del multiplicador que lo ha producido.

Sea por ejemplo, multiplicar 764789 por 20008.

DEMOSTRACIÓN.—El producto total se compone de la suma de los productos del multiplicando por las partes de que está formado el multiplicador, y como en el caso de que nos ocupamos, éste carece de decenas, centenas y millares, no habrá productos parciales producidos por las decenas, ni por las centenas, ni por los millares; pero para que el producto parcial de las decenas de millar tenga el valor que le corresponde, debemos hacer que exprese decenas de millar, lo cual se consigue colocando el producto de las unidades del multiplicando en la columna del orden de unidades de la cifra del multiplicador.

```
     764789
      20008
    6118312
1529578
15301898312
```

SEPTIMO CASO.—Cuando la primera ó la última cifra del multiplicador es la unidad, para obtener el producto, se deja el multiplicando como primer producto parcial, y se colocan los de las demás cifras significativas en la columna que corresponda al orden de unidades de la cifra del multiplicador.

Sea por multiplicar 2789 por 241: la operación se dispone como se ve al lado.

DEMOSTRACIÓN.—El fundamento de esta operación es que toda cantidad multiplicada por la unidad, produce la misma cantidad: y en que á cada producto parcial se le da el valor que le corresponde.

```
  2789×241
 11156
5578
672149
```

Este caso es de frecuente aplicación para los factores entre 10 y 20, que son tan comunes, colocándose entonces el multiplicando en el lugar del producto parcial de las decenas, como es debido.

Sea por multiplicar 346785 por 16. La operación se dispone y ejecuta como se ve aquí al lado.

```
346785×16
2080710
5548560
```


72.—USOS DE LA MULTIPLICACIÓN.—Los usos de la multiplicación son los mismos que los del 2.° caso de la suma, esto es:

1.°—*Conocido el valor de una unidad determinar el de muchas.*

2.°—*Reducir unidades de especie mayor á menor*, y además los que se derivan de la naturaleza de la multiplicación como son: sumar ó tomar una cantidad cierto número de veces, hacer una cantidad cierto número de veces mayor, etc.

73.—Como ejercicio de la multiplicación pondremos los siguientes ejemplos:

1.°—Se quiere saber cuál será el costo de construcción de un ferrocarril de 186 millas de longitud, calculando el costo de cada milla á razón de $49700.

2.°—Se quiere saber qué cantidad de algodón podrá cosecharse en una extensión de terreno igual á 5209 hectaras, bajo el supuesto de que una hectara produce 708 libras de algodón.

3.°—Se quiere reducir 97658 quintales á onzas, componiéndose un quintal de 1600 onzas.

4.°—Se quiere reducir 3809 leguas á pulgadas, dividiéndose una legua en 5000 varas y una vara en 36 pulgadas.

```
          millas       hectáreas.        quintales.  onzas.        leguas
1.° $49700×186     2.° 5209         3.°  97658×1600         4.° 3809
     3976                708 lb.         585948                  5000
      2982             41672        onz. 156252800          vs. 19045000
   $9244200          36463                                            36
                     3687972 lb.                                 114270
                                                                57135
                                                          pulgs. 685620000
```

DIVISION DE LOS NUMEROS ENTEROS.

74.—En el número 56 dijimos que la ejecución del 2° caso de la resta, se facilita por medio de la división, operación que es en realidad, el 2.° caso de la resta abreviado. La división es una operación recíproca de la multiplicación. Cuando se multiplica 3 por 4, se conocen los dos factores y se busca el producto 12. En la división, conocido el producto 12 y uno de los factores 3, se trata de encontrar cuál es el otro factor, que multiplicado por 3 dé 12.

La división se indica de tres maneras:

$$\frac{12}{3}=4 \qquad 12\div 3=4 \quad \text{y} \quad 12:3=4$$

y se lee: 12, dividido, ó partido por 3, igual á 4.

La cantidad que se ha de dividir se llama *dividendo:* aquella por la cual se ha de dividir, *divisor:* y el resultado de la operación, *cociente.* El dividendo es, pues, el producto del divisor por el cociente.

El dividendo y el divisor suelen ser de la misma especie; otras veces son cantidades heterogéneas, y á veces el divisor es abstracto. *Respecto de la especie de las unidades del cociente, debe tenerse presente que no siempre es de la especie del dividendo, ni de la del divisor, sino que la determina la pregunta.*

Por ejemplo, si partimos $12 entre 3 hombres y queremos saber *cuántos pesos* le tocan á cada hombre, el cociente expresará pesos por indicarlo la pregunta.

Si se quiere saber *á cuántas varas* equivalen 12 piés, dividiremos 12 piés por 3 piés, que tiene una vara, y el cociente 4 nos expresará varas, siendo en este caso de especie diferente de la del dividendo y de la del divisor.

75.—Definición.—*La división de los números enteros es la operación por medio de la cual se determina cuántas veces un número contiene á otro.*

Puede decirse igualmente *que la división tiene por objeto, conocido el producto y uno de sus factores, determinar el otro factor.*

76.—Teorema.—*Cuando se multiplica el dividendo por un número, el cociente resultará multiplicado, y si se divide, resultará dividido el cociente por el mismo número.*

Porque siendo el dividendo el producto del divisor por el cociente, al hacerse este producto cierto número de veces mayor, tendrá que hacerse uno de sus factores el mismo número de veces mayor; pero como el divisor permanece constante, resulta que el otro factor que es el cociente, tendrá que multiplicarse por el mismo número por el que se haya multiplicado el dividendo (61.) Recíprocamente, si se divide el dividendo, á causa de permanecer constante el divisor, el cociente que es el otro factor del dividendo, tendrá que resultar dividido. (62.)

77.—Teorema.—*Si se multiplica el divisor por un número, el cociente resultará dividido, y si se divide resultará multiplicado por el mismo número.*

Porque siendo el dividendo el producto del divisor por el cociente, es necesario que al multiplicarse el divisor, que es uno de los factores, por un número, el cociente que es el otro factor, se divida por el mismo número para que permanezca invariable el dividendo; y recíprocamente será necesario multiplicar el cociente por el número por que se divida el divisor (63) para que no se altere el dividendo.

78.—De los teoremas anteriores resulta que *en la división de los números enteros el cociente experimenta variaciones en el mismo sentido de las que se hacen sufrir al dividendo: y en sentido contrario de las que tenga el divisor.*

79.—Teorema.—*El cociente no se altera cuando se multiplican ó se dividen el dividendo y el divisor por el mismo número.*

Demostración.—Cuando se multiplica el dividendo por un número, el cociente se hace mayor tantas veces como unidades tiene este número (76); pero como cuando se multiplica el divisor, el cociente se hace menor el mismo número de veces (77), resulta que habrá perfecta compensación, y aumentando por una operación tanto cuanto disminuye por la otra el cociente permanecerá invariable.

Cuando se divide el dividendo, el cociente se hace menor tantas veces como unidades tiene el número por el que se divide el dividendo [76]; pero como cuando se divide el divisor, el cociente se hace mayor el mismo número de veces (77); resulta que habiendo perfecta compensación, el cociente permanecerá invariable.

80.—Teorema.—*Cuando hay que ejecutar varias divisiones sucesivas es arbitrario el orden en que deban efectuarse, pudiendo hacerse una sola tomando por divisor el producto de todos los divisores.*

Si se divide 30 por 3, y en seguida el cociente 10 se divide por 2, decimos: que el resultado 5 de estas divisiones sucesivas será igual al que se obtiene dividiendo primero 30 por 2, y en seguida dividiendo el cociente 15 por 3; ó igual al que se obtiene dividiendo 30 por 6, producto de los divisores 3 y 2. Esto es:

$$(30\div 3)\div 2=(30\div 2)\div 3=30\div(3\times 2).$$

Demostración.—Como el objeto de la división es determinar uno de los factores de un producto, resulta que *si el producto de dos factores se divide por uno de ellos, el cociente será el otro factor.*

Luego para dividir una cantidad compuesta de varios factores por uno de ellos, bastará suprimir éste para obtener el cociente; y como en el ejemplo tomado por base de nuestra demostración se tiene que

$$30=3\times 2\times 5=6\times 5$$

se infiere que para obtener el cociente de las divisiones sucesivas de 30 por 3 y por 2, es indiferente suprimir primero el factor 3 y en seguida 2 ó viceversa, ó ambos á la vez para obtener el cociente final de 5.

81.—Teorema—*El cociente de toda cantidad dividida por la unidad es la misma cantidad.*

Demostración.—Como toda cantidad multiplicada por la unidad produce la misma cantidad, (64) y el dividendo es el producto del divisor, (que en este caso es la unidad) por el cociente, éste tendrá que ser igual al dividendo, para que multiplicado por la unidad, dé por producto el mismo dividendo.

82.—Fundamento de la regla para la división de enteros.—Supuesto que la división es una operación recíproca de la multiplicación, el conocimiento de los productos de las unidades simples nos conduce á determinar los cocientes de los números inferiores á 100 divididos por las unidades. Si sabemos que $8\times 7=56$, inferimos que $56\div 8=7$. Cuando no se saben de memoria estos cocientes, la tabla de Pitágoras (66) puede servir para hacerlos conocer. Se busca el divisor en la línea horizontal, 8 por ejemplo, y después se recorre la columna vertical de los números que quedan debajo del 8, hasta encontrar el número 56; recorriendo entonces la línea horizontal, el guarismo 7 que la termina nos indica el cociente de $56\div 8$.

El producto de dos números enteros es siempre un número entero pero como no todos los números provienen del producto de dos números enteros, resulta que en el mayor número de casos el cociente es un número mixto. Así, por ejemplo, como $8\times 2=16$, y $8\times 3=24$, todos los números intermedios entre 16 y 24, carecen de cociente entero cuando se les divide por 8, supuesto que es necesario multiplicar 8 por un número mayor que 2 y menor que 3. En este caso, que es el más común, el dividendo se compone de un producto, más una cantidad *que se llama resta;* por ejemplo, $19=(8\times 2)+3$.

Cuando se busca el cociente de un número que no es divisible exactamente por otro, se determina el cociente de otro número menor que el dividendo que dé un cociente exacto y *una resta menor que el divisor.* Si se quiere conocer el cociente de $50\div 8$, se tiene $6\times 8=48$, y $7\times 8=56$; luego 50 está entre los productos de 8 por 6 y por 7: se toma el próximo menor 6 y el producto 48 se resta de 50 para determinar la resta 2.

$$50=8\times 6+2$$

Conocido el cociente de las cantidades menores que 100 divididas por las unidades, se puede fácilmente obtener el cociente de cualquiera cantidad dividida por un número inferior á 10. Para esto se descompone el dividendo en las partes que lo forman, según los órdenes del sistema de numeración; se dividen estas partes por el divisor y se obtienen tantos cocientes parciales como sean las partes del dividendo, cuya suma nos dará el cociente total.

Cuando tanto el dividendo como el divisor tienen muchas cifras, la operación se hace igualmente por partes. Para esto, comenzando por las unidades de orden superior del dividendo, se dividen por el divisor sucesivamente todas las partes de que está formado, y el cociente es igual á la suma de los cocientes parciales. La operación abreviada de la práctica debe concebirse como sigue:

Sea por dividir 1720312 por 4972. Como los cocientes parciales han de estar formados de un solo guarismo, con el objeto de encontrar el primer cociente parcial, separaremos del dividendo los guarismos suficientes de la izquierda para formar la cantidad próxima mayor á 4972, que es 17203, y en consecuencia, consideramos el dividendo compuesto de centenas, decenas y unidades, esto es, $1720312=1720300+10+2$ que dividiremos sucesivamente por 4972. Para hallar el primer cociente, dividiremos 17203 por 4972 y encontraremos el cociente 3: pero como 17203 es 100 veces menor que 1720300, dividendo parcial verdadero, al cociente le agregaremos dos ceros para darle el valor que le corresponde, haciéndolo 100 veces mayor y obtendremos 300 como primer cociente parcial. Multiplicando este número por el divisor, se obtiene el producto 1491600, que restado de la primera parte del dividendo deja la resta 228700. A esta se le agrega la segunda parte del dividendo 10, y dividida la suma por el divisor, se obtiene, haciendo consideraciones semejantes, por segundo cociente parcial 40, y la resta 29830. A esta se le agrega 2, última parte del dividendo, y se obtiene 6 unidades como último cociente parcial, que multiplicado por el divisor produce 29832 y 0 por resta, por lo cual la división es exacta y el cociente igual á 346, suma de los tres cocientes parciales.

$$\begin{array}{r|l}
1720300+10+2 & 4972 \\
-1491600 & 300 \\
228700 & 40 \\
+\quad 10 & 6 \\
228710 & 346 \\
-198880 & \\
29830 & \\
+\quad 2 & \\
29832 & \\
-29832 & \\
0000 &
\end{array}$$

83.—Tales son los fundamentos de la siguiente

REGLA GENERAL PARA DIVIDIR LOS NÚMEROS ENTEROS.—*A la derecha del dividendo se escribe el divisor separado por una línea vertical, y se tira otra horizontal para poner debajo de ella el cociente.*

El primer dividendo parcial se forma separando con una coma de la izquierda del dividendo tantos guarismos como tiene el divisor ó uno más para formar una cantidad mayor que el divisor; y á fin de determinar el primer guarismo del cociente se divide la primera ó las dos primeras cifras del dividendo por la primera del divisor, y el número que resulte se escribe debajo del divisor. En seguida se multiplica este guarismo del cociente por el divisor, y el producto se va restando á paso y medida que se forma de las cifras separadas del dividendo.

Para formar el segundo dividendo parcial se baja al lado de la resta la cifra siguiente del dividendo y se determina el segundo guarismo del cociente, lo mismo que se determinó el primero, á cuya derecha se escribe. Se multiplica el divisor por el segundo guarismo del cociente y al formar el producto se va restando del dividendo parcial, y así se continúa la operación hasta obtener las unidades del cociente y la última resta.

Cuando alguno de los dividendos parciales es menor que el divisor, se pone cero en el cociente antes de bajar la cifra siguiente del dividendo y continuar la operación.

Se conoce que un cociente parcial es mayor que el verdadero, en que su producto por el divisor resulta mayor que el dividendo parcial; y se conoce que un cociente parcial es menor que el verdadero, en que la resta resulta mayor que el divisor. En ambos casos debe corregirse el cociente y repetirse la multiplicación por el divisor haciendo la resta.

84.—Para encontrar fácilmente los cocientes parciales, puede seguirse la siguiente regla: *Después de haber encontrado el cociente, dividiendo el primero ó los dos primeros guarismos del dividendo por el primero del divisor, se comienza á hacer la multiplicación y la resta por las cifras de orden superior: si el producto no puede restarse, el cociente será mayor que el verdadero; en caso contrario, se formará con la resta y la cifra de orden inmediatamente menor del dividendo una cantidad de la cual se restará el producto del cociente por el guarismo que sigue del divisor, y así se continuará la operación hasta que un producto no pueda restarse, ó hasta hallar una resta igual ó mayor que el guarismo del cociente. Cuando se encuentra un producto mayor que el dividendo, el cociente será mayor que el buscado, y cuando se obtiene una resta igual ó mayor que el cociente, éste será el verdadero, ó tal vez menor que el verdadero.*

Por ejemplo, vamos á buscar el cociente de 372456 dividido por


```
372456 | 6945
1      | 6
```

6945. 37 entre 6 á 6, y decimos: 6 por 6, 36, á 37, 1, que unido al 2 siguiente del dividendo forma 12; 6 por 9, 54, que no pudiendo restarse de 12, nos indica que 6 es un cociente muy fuerte. Repetimos la operación con el cociente 5. Multiplicando 5 por 6 da 30, á 37, 7; resta que siendo mayor que el cociente 5 nos indica que este número es el cociente verdadero, supuesto que ya probamos que 6 no puede serlo. Esta operación auxiliar se ejecuta siempre á la memoria. La razón de esta parte de la regla es que la cifra retenida al formar el producto de un número por otro que no llega á 10, es menor que el multiplicador; y en consecuencia, cuando comenzando por las unidades de especie mayor se obtiene una resta igual ó mayor que el cociente, es seguro que podrá hacerse la resta al ejecutar la operación en el orden directo.

```
372456 | 6945
     7 | 5
```

85.—EJEMPLO.—Sea por dividir 28.003,842 por 875. Conforme á la regla, las cantidades se escriben como se ve en la operación adjunta. Separando tres cifras del dividendo, resulta 280 que no puede contener al divisor 875, por lo que tomaremos cuatro cifras, 2800 que representan decenas de millar, de cuyo orden será el primer guarismo del cociente. Dividiendo 28 entre 8, se obtiene 3 por cociente. El producto y la resta se forman como sigue: 3 por 5, 15, á 20, 5 y van 2; 3 por 7, 21, y 2 retenidas son 23, á 30, 7 y van 3; 3 por 8, 24, y 3, 27, á 28, 1. Al lado de la resta 175, que es menor que 875, se baja el guarismo 3 del dividendo, y dividiendo 1753 entre 875 se encuentra el cociente 2, que se pone á la derecha de 3; y la resta 3. Al lado de esta resta se baja el guarismo 8, y como 38 no puede dividirse entre 875 se pone 0 en el cociente y se baja el 4 del dividendo. Como 384 es menor que el divisor, se pone otro 0 en el cociente y se baja el 2 del dividendo. Dividiendo 3842 por el divisor, se encuentra 4 unidades por cociente, y la resta 342.

```
28003842 | 875
 1753    | 32004
   003842
      342
```

El cociente es 32004 y la resta 342. Esto es,

$28003842 = 875 \times 32004 + 342$. Con la resta y el divisor se forma un quebrado como lo explicaremos en el párrafo 150.

El cociente de dos números enteros consta de tantos guarismos como tiene el dividendo, menos los del divisor, ó de uno más. En efecto, el cociente consta de la cifra que resulta de dividir el primer dividendo parcial por el divisor y de una cifra más por cada una de las que se separaron á la derecha. Cuando el primer dividendo parcial tenga una cifra más que el divisor, el cociente constará de tantas cifras como tenga el dividendo menos las del divisor; y cuando el primer dividendo parcial tenga igual número de cifras que el divisor, el cociente constará de tantas cifras como tenga el dividendo menos las del divisor y de una más.

86.—Demostración de la regla general de dividir enteros.—Cuando con todas las partes que constituyen una cantidad, se ejecuta una operación, el resultado es el mismo que se obtiene de ejecutar con toda la cantidad la misma operación. Practicando la regla hemos encontrado el cociente de todas las partes del dividendo divididas por el divisor, y hemos dado á cada cociente parcial el valor que le corresponde; luego la suma de los cocientes parciales, que es el cociente obtenido, será el valor verdadero del dividendo dividido por el divisor.

87.—Prueba.—Para ejecutar la prueba de la división procederemos como en el siguiente ejemplo:

```
734645 | 638
 966   | 1151
3284
  945
  307
```

PRUEBA.

Dividendo.	Divisor.
29....11....2	17....,8
Resta....1	8 cociente.

8×8=64+1=65.....11........2
Suma del dividendo......2

La suma de los guarismos del dividendo da 29; sumando los dos de esta cantidad se obtiene 11, y los de esta dan 2 *unidades*. La suma de los guarismos del divisor da 17 y la de los del 17 da 8. Los del cociente dan 8. La suma de los guarismos de la resta da 10 y los de este número, 1 *unidad*. Ahora multiplicamos el número que procede del divisor por el del cociente: $8\times8=64$, agregamos el de la resta 1; y sumamos los guarismos del resultado 65, $6+5=11$, $1+1=2$, hasta obtener *unidades*. El número encontrado, 2, deberá ser igual al que procede del dividendo 2, si la operación ha estado bien hecha.

Regla.—*Para hacer la prueba de la división de los números enteros, se reducen á unidades simples separadamente el dividendo, el divisor, el cociente y la resta. Se forma el producto de la cifra del cociente por la del divisor y se agrega la de la resta. El resultado se reduce á unidades simples; debiendo obtenerse, cuando no ha habido error en la división, un guarismo igual al que resultó de reducir á unidades simples el dividendo.*

El fundamento de esta prueba lo daremos en el párrafo 133.

88.—Casos.—Los casos de la división de enteros son seis:

1.º *Cuando el divisor consta de una sola cifra, y el dividendo es menor que el producto de esta cifra por 10.*

2.º *Cuando el divisor tiene un guarismo y el dividendo consta de muchos.*

3.º *Cuando tanto el divisor como el dividendo constan de muchos guarismos.*

4.º *Cuando el divisor es la unidad seguida de ceros.*

5.º *Cuando el dividendo y el divisor terminan en ceros; y*

6.º *Cuando solo el divisor termina en ceros.*

El primer caso se resuelve á la memoria.

Segundo caso.—*Cuando el divisor tiene un solo guarismo,* la operación se dispone y ejecuta como vamos á explicarlo en el ejemplo adjunto:

$4386\div7=626+4$ de resta.
$626+4$

Se dice séptima de 43 son 6, que se escribe debajo del 3; 6 por 7 son 42 á 43 sobra una centena que unida á 8 decenas forma 18; séptima de 18 son 2, que se escribe debajo; 2 por 7 son 14 á 18 sobran 4 decenas, que unidas á 6 unidades forman 46; séptima de 46 son 6 por 7 son 42 á 46 sobran 4 unidades. El cociente es 626 y la resta 4.

Tercer caso.—*Cuando tanto el dividendo como el divisor constan de muchos guarismos, la operación se resuelve por la regla general* (83.)

Cuarto caso.—*Cuando el divisor es la unidad seguida de ceros, se separan en el dividendo, contando de derecha á izquierda tantos guarismos como ceros tenga el divisor: el cociente será la cantidad representada por los guarismos del dividendo que quedaron á la izquierda, y la resta la indicarán los guarismos separados á la derecha.*

Ejemplo. 38745÷1000=38(745
el cociente es 38 y la resta 745.

Demostración.—Como toda cantidad dividida por la unidad da por cociente la misma cantidad (81), si el divisor fuera la unidad, el cociente sería el dividendo: pero como aquel es 10, 100, 1000, etc., veces mayor que la unidad, según sea el número de ceros en que termine; para que el cociente sea el verdadero, tendremos que hacer al dividendo 10, 100, 1000, etc., veces menor; lo cual se consigue separando tantas cifras á la derecha como ceros tenga el divisor (20;) quedando la otra parte como resta, supuesto que cualquier cociente multiplicado por los ceros del divisor, produce cero, que restado del dividendo, la diferencia es igual á las cifras del dividendo separadas á la derecha.

Quinto caso.—*Cuando el dividendo y el divisor terminan en ceros, se* *suprime igual número de ceros en ambos términos, y se dividen las cifras restantes.*

EJEMPLO. 385000÷2200=3850÷22

el cociente es 17 y la resta 11.

DEMOSTRACIÓN.—Como se ha visto (76), cuando se suprimen los ceros del dividendo, se hace el cociente 10, 100, 1000, etc , veces menor; pero al suprimirse igual número de ceros en el divisor, el cociente se hace 10, 100, 1000, etc., veces mayor (77); luego disminuyendo por la supresión de los ceros del dividendo, tanto como aumenta por la de los del divisor, el valor del cociente no sufrirá alteración y será el verdadero (79).

SEXTO CASO.—*Cuando sólo el divisor termina en ceros, se separan éstos, é igual número de guarismos á la derecha del dividendo, se hace la división de las cifras significativas que no se hayan separado, y al concluir la división se agregan á la resta las cifras separadas en el dividendo, volviendo á expresar el divisor con los ceros de que consta.*

Sea por ejemplo, dividir 7345785 por 328000.

Se separan los tres ceros del divisor y las tres últimas cifras del dividendo, dividiendo únicamente 7345 entre 328, siendo el cociente 22; pero el resultado final debe expresarse así

7345(785	328(000
785	22
129785	

$$7345785=328000\times22+129785$$

DEMOSTRACIÓN.—Hay dos cosas que demostrar; 1.ª que el cociente verdadero es 22, y 2.ª que la resta de la división es 129785. Cuando hemos hecho abstracción de los tres ceros separados del divisor lo hemos hecho *mil* veces menor; pero como al prescindir de las tres últimas cifras separadas en el dividendo hemos hecho este término también *mil* veces menor, el cociente 22 será el verdadero (79). En cuanto á la resta, como al multiplicar el cociente 22 por el divisor 328000 la resta de los millares es 129 millares, y el producto de los tres ceros con que termina el divisor es cero, la diferencia al dividendo sería 785 unidades, y por tanto, la resta total de la división será 129785.

89.—Usos.—Los usos de la división son cuatro principales:

1.º—*Ver cuántas veces un número contiene á otro.*

2.º—*Reducir unidades de especie menor á mayor.*

3.º—*Conocido el valor total de muchas unidades y el número de ellas, determinar el valor de una.*

4.º—*Conocido el valor de muchas unidades y el de una sola, determinar el número de ellas.*

Además, tiene los usos que en general se derivan de la naturaleza de la operación, como determinar cuántas veces se puede restar una cantidad de otra; buscar una cantidad cierto número de veces menor que otra; dividir un número en partes iguales; hacerlo cierto número de veces menor, determinar uno de los dos factores de un producto, etc.

90.—Como ejercicio, pondremos los siguientes ejemplos:

1.º Una persona quiere repartir el caudal de $125,000 entre sus ocho hijos, por partes iguales, y se quiere conocer la cantidad que le tocará á cada uno de ellos.

2.º La superficie de una hacienda es de 443.988,745 varas cuadradas, y se quiere reducir á criaderos de ganado mayor, en el concepto de que un criadero de ganado mayor es igual á 6.250,000 varas cuadradas.

3.º Por 1200 toneladas de rieles se han pagado 288,000 pesos, y se quiere conocer el precio de cada tonelada.

4.º Se quiere saber cuántas veces podrá restarse 100 del número 8000.

5.º Una compañía ha gastado 22.914,795 pesos en la construcción de un ferrocarril de una sola vía, y según sus cuentas, como término medio, el costo de la legua ha resultado á razón de $78,745; se quiere saber cuántas leguas de largo tendrá la vía.

6.º Un distrito, cuya superficie es de 345 leguas cuadradas, tiene una población de 66230 habitantes: se quiere saber cuál es su población relativa, esto es, cuántos habitantes tiene por legua cuadrada

1.º—$125000÷8
15625

2.º—44398(8745	625(0000
648	71 criad. y 238745 vs. cds.
238745	

3.º—$2880(00	12(00
48	240 $ tonelada
00	

4.º—80(00	1(00
	80 veces.

5.º—$229147,9,5	78745 $
716579	291 leguas
78745	
0000	

6.º—66230	345 leguas.
3173	191
680	
335	

Prueba { 3 | 4 / 3 ; $\overline{12}$....3

Prueba { 8 / 2 | 3 / 2 ; $\overline{6}$+2=8.

91.—Como habrá podido observarse, la división es la única operación de enteros que se comienza por la izquierda, lo cual tiene por objeto que la resta de las partes de mayor especie pueda reducirse á la inmediata siguiente, obteniéndose así en el cociente por cada resta un solo guarismo de cierto orden.

La división de los números enteros pocas veces conduce á un cociente entero, y por esto es necesario concebir el dividendo formado por el producto de dos números, más una cantidad igual á la resta.

Cuando el cociente es entero y no hay resta, el dividendo es tantas veces mayor que el divisor, como unidades tiene el cociente, y recíprocamente el divisor es tantas veces menor que el dividendo como unidades tiene el cociente, supuesto que el dividendo es el producto del divisor por el cociente.

En consecuencia, si el producto de dos factores se divide por uno de ellos, el cociente será el otro factor.

Por último, debemos repetir que el cociente suele ser de especie diferente á la del dividendo y á la del divisor: que no se debe obtener un cociente parcial mayor que 9, ni ninguna resta mayor que el divisor; y que por cada resta se determina un guarismo en el cociente pudiendo ser éste cero.

PROPIEDADES DE LOS FACTORES Y DIVISORES ENTEROS.

92.—Definiciones.—*Número primo es el que no da un cociente entero sino cuando se le divide por sí mismo ó por la unidad.* Tales son los números 7 y 13, de los que no se obtiene un cociente entero sin resta, sino cuando el divisor es el mismo número ó la unidad.

93.—*Todo número que no es primo, es el producto de varios factores diferentes de la unidad, y se llama múltiplo* de cualquiera de sus factores. Por ser $35=7\times5$, será múltiplo de 7 y de 5.

94.—*Recíprocamente, se llama submúltiplo ó parte alícuota de una cantidad, el número que la puede dividir dando un cociente entero sin ninguna resta.*

95.—*Varios números son primos entre sí cuando no tienen más divisor común que la unidad.* Por ejemplo: 4 y 9 son primos entre sí, y los números 6, 9 y 12 no son primos entre sí, porque son divisibles por 3.

96.—*Se llama máximo común divisor de varios números, el mayor número que puede dividirlos exactamente.*

Por ejemplo: 6 es el máximo común divisor de 12 y de 18, habiendo otros números menores que 6, como 3, que también pueden dividirlos.

El máximo común divisor de varios números primos es la unidad.

97.—*Se llama menor múltiplo común de varios números, el menor número que puede resultar como producto de multiplicar sucesivamente cada uno de los propuestos por algún número entero.*

Por ejemplo: 24 es el menor múltiplo de 6 y de 8; habiendo otros, como 48, mayores que 24 que son múltiplos de 6 y de 8.

98.—*Descomponer un número en sus factores, es encontrar varios números cuyo producto sea el número propuesto.* Siendo $30=2\times3\times5$ se ha descompuesto en tres factores, 2, 3 y 5.

99.—*Cuando los factores de un producto son todos iguales entre sí, al producto se llama potencia del número que ha servido de factor.*

Siendo $25=5\times5$ y $81=3\times3\times3\times3$, 25 es la segunda potencia de 5 y 81 es la cuarta potencia de 3.

Se llama grado de la potencia el número de factores del producto. Así, 2 y 4 son los grados de las potencias á que ha sido necesario elevar respectivamente 5 y 3 para producir 25 y 81.

A la 2.ª potencia se le llama generalmente *cuadrado* y á la 3.ª potencia *cubo* del número propuesto.

La potencia de una cantidad se indica poniendo arriba y á la derecha, un pequeño número llamado *exponente, que expresa cuántas veces ha entrado la cantidad como factor en el resultado.*

Así $\qquad 5^2=25$ y $3^4=81$

se lee 5 elevado al cuadrado igual á 25, y 3 elevado á la 4ª potencia igual á 81.

Debe observarse que *por ser 10 la base del sistema de numeración, toda potencia de 10 es igual á la unidad seguida de tantos ceros como unidades tenga el exponente ó grado de la potencia.*

100.—*Se llama raíz de un número, otro número que multiplicado una ó varias veces por sí mismo da por producto el primer número.* Siendo $81=3\times3\times3\times3$ se dice que 3 es raíz de 81, y por entrar el número 3, cuatro veces como factor en el producto 81 decimos que es la raíz 4ª

Se indica $\qquad 3=\sqrt[4]{81}$

leyéndose 3 igual á la raíz 4.ª de 81.

10 es la raíz del número representado por la unidad seguida de tantos ceros como expresa el índice de la raíz. Por ejemplo:

$$10=\sqrt[3]{1000}.\ \text{En efecto, } 10^3=10\times10\times10=1000.$$

101.—Determinación de los números primos.—Para determinar los números *primos* hasta cierto límite, bastará excluir todos los números que son *múltiplos* de otros, y á este fin haremos observar que los números que se forman por la adición sucesiva de un mismo número son *múltiplos* de este sumando. Por ejemplo, si sumamos 5 consigo mismo, obtendremos: $5+5=10$ múltiplo de 5; $5+5+5=15$ múltiplo de 5; $5+5+5+5=20$ múltiplo de 5. En consecuencia, si formamos por la adición sucesiva de 2 en 2 unidades los números 4, 6, 8, etc., resultarán los múltiplos de 2, que debemos excluirlos. En seguida, por la adición sucesiva de 3 en 3 unidades formaremos los números 6, 9, 12, etc., que serán múltiplos de 3; y continuando este procedimiento hasta el límite fijado excluiremos todos los números que sean *múltiplos* de otros y quedarán los números primos.

Pongamos la serie de números desde 1 hasta 30:

1—2—3—4—5—6—7—8—9—10—11—12—13—14'

15—16—17—18—19—20—21'—22''—23—24

25—26'''—27—28'—29—30.

Desde luego el número 1 es primo porque no puede dividirse más que por sí mismo, y los números 2 y 3, son primos, en razón de que no pueden descomponerse en grupos iguales entre sí, á menos que los formemos por adiciones sucesivas de la unidad. En seguida, por la adición de 2 en 2 unidades formaremos los múltiplos de 2. El número 4 es múltiplo de 2 porque $4=2+2=2\times2$. El número $6=2+2+2=2\times3$. El número $8=2+2+2+2=2\times4$, y en general, si partiendo del número 2 se va contando de dos en dos los números 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 y 30, marcados con una linea por debajo, se excluirán los múltiplos de 2.

Si se buscan ahora los números formados por la adición sucesiva de tres en tres unidades, los encontraremos si partiendo del número 3 contamos de tres en tres guarismos. Asi se determinan los números 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 y 30; marcados con un punto por debajo, y que son los múltiplos de 3. No nos ocuparemos en determinar los múltiplos de 4, porque no siendo este número primo, todos sus múltiplos lo son de 2, y por consiguiente ya están excluidos.

Pasando al número 5, determinaremos todos sus múltiplos contando desde 5 los guarismos de cinco en cinco, y señalaremos con dos puntos por debajo los números 10, 15, 20, 25 y 30, múltiplos de 5. Los múltiplos de 6 siéndolo de 3 ya están excluidos.

Contando desde 7, de siete en siete guarismos, determinaremos los números 14, 21 y 28, marcados con una coma por encima, y que son los múltiplos de 7. Los múltiplos de 8, 9 y 10 ya están excluidos.

Contando de 11 en 11 determinaremos el número 22, múltiplo de 11, señalado con dos comas por encima.

Y por último, contando de 13 en 13 guarismos, se determina el número 26, múltiplo de 13, marcado con tres comas.

Los números primos inferiores á 30, son los siguientes:

1—2—3—5—7—11—13—17—19—23 y 29,

los cuales no se han excluido, porque no son múltiplos de ninguno otro.

Por este procedimiento, algo abreviado en la práctica, se forman tablas de los números primos hasta el límite que se quiere.

Para determinar si un número aislado es primo, deberá dividirse sucesivamente por los números primos 2, 3, 5, 7, etc., menores que su mitad, y en caso de que no sea divisible exactamente por ninguno de ellos, el número propuesto será primo.

Si queremos averiguar si 11 es número primo, lo dividiremos sucesivamente por 2, por 3 y por 5, números primos menores que su mitad, y no siendo divisible por ninguno de ellos será número primo. Es inútil hacer la división por los números primos mayores que su mitad, supuesto que no puede descomponerse un número en menos de *dos* partes, cada una de ellas iguales á su *mitad.*

Si se trata de averiguar si 27 es número primo, su división por 2 conduce á la resta 1; pero como dividido por 3 da el cociente exacto 9, resulta que es múltiplo de 3.

102.—Descomposición de un número en sus factores primos.—Una vez conocidos los números primos 2, 3, 5, 7, 11......hasta el límite que se quiera, *para descomponer un número en sus factores primos, se le dividirá primero por 2, en caso de que la división sea exacta, se dividirá el cociente que resulte otra vez por 2, repitiéndose la división por este número hasta que se obtenga un cociente indivisible por 2. En seguida, ese cociente se dividirá por 3, y siendo posible se repetirán las divisiones hasta obtener un cociente indivisible por 3, y así continuarán dividiéndose los cocientes que vayan resultando sucesivamente por cada uno de los números primos, 5, 7, 11, etc., cuantas veces sea posible, hasta obtener 1 como último cociente.*

El número propuesto será igual al producto de los números primos que hayan servido de divisores, elevado cada uno de ellos á una potencia expresada por el número de divisiones que con él se hayan hecho.

168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

Por ejemplo, si se quiere descomponer el número 168 en sus factores primos, lo dividiremos por 2 y se tendrá el cociente exacto 84, el cual lo volveremos á dividir por 2 y se obtiene 42, que dividido por 2, da por cociente 21, número indivisible por 2. Dividido este cociente por 3, se obtiene 7, número que siendo primo, dará, dividido por sí mismo, la unidad por cociente.

En consecuencia: $168 = 2^3 \times 3 \times 7$.

La descomposición de los números en sus factores primos, sirve, 1.º, para conocer todos los divisores enteros que puede tener una cantidad; 2.º, para determinar el menor múltiplo de varios números; y 3.º, para encontrar el máximo común divisor.

103.—Determinación de los divisores de un número.—Si queremos determinar todos los números enteros que pueden dividir exactamente, por ejemplo, á 180, comenzaremos por descomponerlo en sus factores primos, empleando el procedimiento explicado en el párrafo anterior, y es claro que siendo $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$, será divisible exactamente por cada uno de sus factores primos y por los diversos productos que con ellos puedan formarse.

180	2
90	2—4
45	3—6—12
15	3—9—18—36
5	5—10—20—15—30—60—45—90—180
1	

Para determinar fácilmente estos productos diversos, multiplicaremos el segundo divisor 2, por el primero que está encima de él, y el producto 4, que será divisor de 180, lo escribimos á la derecha del segundo divisor. En seguida multiplicaremos el tercer divisor 3, por todos los números que están encima de él; y los productos 6 y 12 se escriben á su derecha, omitiéndose los resultados iguales á los obtenidos: y así se continúa la operación hasta el último factor 5. Los números todos que pueden dividir á 180, serán los factores primos y los productos diferentes encontrados. Ordenándolos se tiene que los divisores de 180, serán: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90 y 180, y solo estos números lo dividirán exactamente.

Regla.—*Para encontrar todos los divisores de un número, se le descompondrá en sus factores primos, se multiplicará el segundo factor por el primero, y se escribirá á su derecha el producto; en seguida, el tercer factor se multiplicará por los dos factores primos y por el producto encontrado; y se continuará la operación multiplicando cada divisor por los números que haya encima de él; teniendo cuidado de omitir los productos ya obtenidos. Todos los factores primos y los productos diferentes, dividirán exactamente al número propuesto.*

El fundamento de esta regla es que cuando se han determinado los factores primos de que está compuesto un número, éste será divisible por todos estos factores y por todas las combinaciones que con ellos puedan hacerse, pero nada más por estos factores y sus respectivas combinaciones.

Se puede determinar el número de divisores, que tendrá un número, *agregando una unidad á cada uno de los exponentes de los factores primos de que está formado, y formando el producto de los números que resulten.* Cuando algún factor no tenga exponente, se supondrá que lo es la unidad.

Por ejemplo	$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
siendo los exponentes	2, 2, y 1,
formaremos el producto de	$3 \times 3 \times 2 = 18$,

y 18 serán los divisores que tendrá 180, cuyo resultado es en efecto el que acabamos de obtener.

104.—Determinación del menor múltiplo.—Regla.—*Para encontrar el menor múltiplo común de varios números, se comienza por excluir los que son factores de alguno de los propuestos; los números que queden se descompondrán en sus factores primos, y el menor múltiplo común será el producto de todos los factores primos diferentes que entren en su formación, afectado cada uno de estos factores del mayor de sus exponentes.*

Por ejemplo, si se busca el menor múltiplo de

3, 5, 8, 10, 15, 24 y 72

comenzaremos por excluir á 3 que es factor de 15, á 5 que lo es de 10, á 8 que lo es de 24 y á 24 que es factor de 72; en seguida, descomponiendo en sus factores primos los números no excluidos, tendremos:

$$10 = 2 \times 5$$
$$15 = 3 \times 5$$
$$72 = 2^3 \times 3^2$$

y el menor múltiplo de los números propuestos será

$$2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$$

Este número será *múltiplo* de los demás, porque contiene todos los factores de que cada uno está formado, y será el *menor* múltiplo, porque solo contiene los factores absolutamente indispensables para poder ser producto de todos los números propuestos.

105.—Máximo común divisor.—Regla.—*Para determinar el máximo común divisor de varios números, se les descompondrá en sus factores* *primos, y el máximo común divisor será el producto de los factores primos iguales que entren en su formación, afectado cada uno del menor de sus exponentes.*

Si, por ejemplo, se busca el máximo común divisor de 72 y de 180, descomponiendo estos números en sus factores primos tendremos:

$$72 = 2^3 \times 3^2$$
$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

y el máximo común divisor será:

$$2^2 \times 3^2 = 36$$

Este número *dividirá exactamente* á 72 y á 180, supuesto que está formado de factores comunes á estos dos números; y será el *mayor divisor* de ellos en razón de que cada uno de los factores comunes se ha elevado á la mayor potencia que ha sido posible,

106.—Primer teorema.—*Un número que divide exactamente á otro, divide igualmente á todos sus múltiplos.*

Si 8 divide á 24, todo múltiplo de 24 será también divisible exactamente por 8.

Demostración.—Si para fijar el raciocinio de nuestra demostración tomamos como múltiplo de 24 á $96 = 24 \times 4$, tendremos en virtud de ser 24 divisible exactamente por 8 que $\frac{24}{8}$ dará por cociente un número entero.

$$\frac{24}{8} = 3$$

si multiplicamos el dividendo por 4, el cociente de $24 \times 4 = 96$ dividido por 8, será (76) 4 veces mayor que el cociente 3, esto es,

$$\frac{24 \times 4}{8} = \frac{96}{8} = 3 \times 4$$

pero como el producto 3×4 de dos números enteros siempre es entero y cuando el cociente es entero, los números son divisibles exactamente, resulta que tanto 96 como cualquiera otro múltiplo de 24 será divisible exactamente por 8; en razón de tener que ser el cociente respectivo el producto de 3 por otro número entero.

107.—Segundo teorema.—*Si las dos partes en que puede descomponerse una cantidad son divisibles exactamente por un número, la cantidad total será divisible por dicho número.*

Sea $72 = 48 + 24$; si las dos partes 48 y 24 son divisibles exactamente por 6, también 72 será divisible por 6.

Supuesto que las dos partes de 72 son divisibles exactamente por 6, darán por cociente números enteros, y tendremos:

$$48 \div 6 = 8$$
$$24 \div 6 = 4$$

y como el cociente de una cantidad es igual á la suma de los cocientes de sus partes, sumando ordenadamente las expresiones anteriores, se tendrá:

$$(48 + 24) \div 6 = 8 + 4$$

ó bien $$72 \div 6 = 8 + 4.$$

pero como estos dos cocientes 8 y 4 son números enteros, su suma también lo será, y en consecuencia 72 será divisible exactamente por 6.

108.—Tercer teorema.—*Siempre que una cantidad pueda descomponerse en dos partes, y tanto la cantidad como una de sus partes sean divisibles exactamente por un número, la otra parte también será divisible por este número.*

Sea $60 = 40 + 20$: si tanto 40 como 60 son divisibles exactamente por 4, decimos que la otra parte 20 será también divisible por 4.

Demostración.—Supuesto que tanto 60 como una de sus partes 40, son divisibles exactamente por 4, sus respectivos cocientes serán números enteros y tendremos:

$$60 \div 4 = 15$$
$$40 \div 4 = 10$$

como si de cantidades iguales se restan cantidades iguales, los resultados serán iguales, tendremos.

$$(60 - 40) \div 4 = 15 - 10$$

ó bien $$20 \div 4 = 15 - 10$$

pero como los dos cocientes, 15 y 10 son números enteros, su diferencia también lo será, y en consecuencia 20, que es la otra parte de 60, será divisible exactamente por 4.

Corolarios.—En la división de los números enteros podemos distinguir dos casos.

1.º—Cuando no hay resta, por ejemplo $60 \div 15 = 4$
de lo que se deduce $60 = 15 \times 4$

2.º—Cuando hay resta, por ejemplo: $60 \div 8$ da 7 por cociente y 4 de resta, de lo cual se deduce que

$$60 = 8 \times 7 + 4.$$

En el primer caso, cuando la división no da resta, siendo

$$60 = 15 \times 4$$

cualquier número que divida exactamente al divisor ó al cociente dividirá al dividendo. En efecto, 5 que divide á 15 dividirá á 60, y 2 que divide á 4 dividirá á 60 (106).

En el 2º caso cuando la división deja una resta, por ejemplo $60 \div 8$, da

$$60 = 8 \times 7 + 4$$

si el divisor 8, y la resta 4, son divisibles por un mismo número, por 4, por ejemplo, lo será igualmente el dividendo; supuesto que las dos partes en que 60 está descompuesto son divisibles por 4 (107); la primera 8×7, por ser múltipla de 8, y la segunda por el supuesto.

Si tanto el dividendo como el divisor son divisibles por un número, 2 por ejemplo, lo será igualmente la resta. La parte 8×7 será divisible por 2 por ser múltipla de 8 y siendo divisible la cantidad 60 y una de sus partes, lo será la otra, que es la resta 4 (108).

109.—Cuarto teorema.—*Si el producto de dos factores y cada uno de ellos se dividen separadamente por un número dado, la resta que queda en la división del producto, es igual á la que resulta de dividir el producto de las restas de los factores por el mismo número.*

Sea $$23 \times 47 = 1081$$

$23 \div 7$ da 3 por cociente y 2 de resta.
$47 \div 7$ da 6 por cociente y 5 de resta.

y decimos que la resta de 1081 dividido por 7 es igual á la que resulta de dividir 2×5, producto de las restas de los factores, por el mismo número 7.

Demostración.—De la división de cada uno de los factores por 7, resulta que

$$23 = 7 \times 3 + 2$$
$$47 = 7 \times 6 + 5$$

y como si cantidades iguales se multiplican por iguales, los resultados serán iguales, tendremos que

$$23 \times 47 = (7 \times 3 + 2) \times (7 \times 6 + 5)$$

Ejecutaremos la multiplicación indicada en el segundo miembro de la ecuación, multiplicando primero las dos partes del multiplicando, 7×3 y 2 por la primera del multiplicador 7×6, y obtendremos los productos.

$$(7 \times 3 \times 7 \times 6) \text{ y } (2 \times 7 \times 6)$$

que ambos son múltiplos de 7.

En seguida multiplicaremos las dos partes del multiplicando por 5, que es la segunda del multiplicador, y se obtendrá:

$$(7 \times 3 \times 5) \text{ y } (2 \times 5)$$

de cuyos productos el primero es múltiplo de 7.

Así es que

$$\begin{aligned} 23 &= 7 \times 3 + 2 \\ \times 47 &= 7 \times 6 + 5 \\ \hline 23 \times 47 &= (7 \times 3 \times 7 \times 6) + (2 \times 7 \times 6) + (7 \times 3 \times 5) + (2 \times 5) \end{aligned}$$

A consecuencia de haber descompuesto cada uno de los factores en una parte que es un producto de 7, tres de las cuatro partes de que está formado el producto total, son también múltiplos de 7, y por tanto divisibles exactamente por este número, y solo en la última parte 2×5 que resultó del producto de las restas de los factores, no entra como factor 7. Si dividimos por 7 la ecuación, tendremos:

$$\frac{23 \times 47}{7} = \frac{(7 \times 3 \times 7 \times 6)}{7} + \frac{(2 \times 7 \times 6)}{7} + \frac{(7 \times 3 \times 5)}{7} + \frac{(2 \times 5)}{7}$$

y como las tres primeras partes del segundo miembro no dan ninguna resta en razón de ser cada uno de los dividendos múltiplo del divisor 7, se infiere que *la resta que dé el producto* 23×47 *dividido por* 7, *será igual á la que resulte de dividir el producto* 2×5 *de las restas de los factores, por el número dado* 7.

Como aplicaciones de estos cuatro teoremas, pondremos los siguientes ejemplos:

1º Si el número 10 es divisible exactamente por 5, cualquiera múltiplo de 10 será divisible por 5. En efecto, cualquiera número de decenas, por ejemplo, 780, que es igual á 78×10, será divisible exactamente por 5. Del mismo modo toda potencia de 10, por ser múltiplo de este número, será divisible por 5; así, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$ y todas las potencias de 10 son exactamente divisibles por 5.

2º Si descomponemos el número 956 en dos partes $950 + 6 = 95 \times 10 + 6$ y observamos que por ser la primera parte, 95×10 múltiplo de 10 es divisible por 2, y que también lo es la otra parte 6, inferiremos que el número 956 será divisible por 2, en virtud del segundo teorema.

3º Si dividimos 7200 entre 7, hallaremos 1028 por cociente y 4 por resta, luego

$$7200 = 1028 \times 7 + 4$$

y observando que la cantidad 7200, lo mismo que la resta 4 son números divisibles por 4, inferiremos conforme al tercer teorema, que la otra parte 1028×7 también será divisible exactamente por 4.

4° Considerando á 30 como el producto de los factores 10×3 tendremos, conforme al cuarto teorema, que la resta que queda en la división del producto es igual á la que se obtiene dividiendo el producto de las restas de los factores, por ejemplo, por el número 6. Si dividimos 10 entre 6, la resta es 4, dividiendo 3 entre 6 el cociente es 0 y la resta 3; luego la resta de 30 dividido por 6, será igual á la del producto 3×4 ó 12 dividido por 6, y como esta resta es 0 inferiremos, lo que es una verdad, que 30 es divisible exactamente por 6, supuesto que da 0 por resta.

5° Si dividimos 10 entre 7 obtendremos por resta 3; para determinar la resta que dejaría 100 dividido por 7, conforme al cuarto teorema, tendremos que siendo $100 = 10 \times 10$, la resta de 100 será la que deje el producto de las restas $3 \times 3 = 9$ dividido por 7, esto es 2. Si queremos determinar la resta que dejaría 1000, considerando este número como el producto de 100 por 10, dividido por 7, tendremos que siendo 2 la resta de 100 dividido por 7, y 3 la resta de 10, la resta de 1000 será igual al producto de las restas 2×3 dividido por 7, esto es, 6. Se ve, pues, con qué facilidad pueden determinarse las restas de las potencias sucesivas de 10 divididas por un número dado.

110.—Regla para encontrar el máximo común divisor entre dos cantidades.—*Se divide la mayor por la menor: si la división resulta exacta, esto es, si no da resta, la cantidad menor será el máximo común divisor; en caso contrario, se divide el divisor por la resta, y si la división no sale exacta se continúa la operación dividiendo sucesivamente el último divisor por la resta hasta obtener una división exacta. El último divisor será el máximo común divisor. Cuando éste sea la unidad, los números serán primos entre sí.*

111.—Ejemplo.—Sea por determinar el máximo común divisor de los números 1440 y 624. Dividiremos 1440 por 624: se obtiene el cociente 2 y la resta 192. Después dividiremos 624 por la resta 192, se obtiene 3 por cociente y 48 por resta. En seguida dividiremos 192 por 48 y obteniéndose una división sin resta, el último divisor, 48, será el máximo común divisor de los números 1440 y 624.

```
            1440 | 624
       624 | 192 |  2
  192 | 48 |  3
   00 |  4
```


A esta serie de divisiones se les da comunmente la forma de tabla, poniendo las restas á la derecha del divisor como se ve aquí al lado, y los cocientes 2 3 y 4 debajo de sus correspondientes divisores.

1440	624	192	48	00
	2	3	4	

112.—Demostración de la regla para hallar el máximo común divisor.—Hemos dicho que máximo común divisor de dos cantidades es el mayor número que puede dividirlas exactamente (96). En consecuencia, aplicando nuestros raciocinios al ejemplo propuesto, tendremos que demostrar dos cosas: 1°, que 48 divide exactamente á los números propuestos 1440 y 624; 2°, que 48 es el mayor número que puede dividirlos exactamente.

1°—Vamos á demostrar que 48 *divide exactamente* á 624 y á 1440.

Sabemos que 48 se divide exactamente á sí mismo, porque toda cantidad multiplicada por 1 da por producto la misma cantidad (64).

Como resultado de la última división, hemos obtenido:

$$192 = 48 \times 4$$

luego conforme al primer teorema (106), se infiere que 48 dividirá exactamente á 192 por ser múltiplo de 48.

Como resultado de la penúltima división hemos obtenido:

$$624 = 192 \times 3 + 48$$

sabemos que 48 se divide exactamente á sí mismo; hemos demostrado que 48 divide á 192, y conforme al primer teorema, dividirá á su múltiplo 192×3. Si, pues, 48 divide exactamente á las dos partes de 624, conforme al segundo teorema (107), se infiere que dividirá exactamente á 624.

Como resultado de la primera división obtuvimos:

$$1440 = 624 \times 2 + 192$$

hemos demostrado que 48 divide exactamente á 192 y á 624, y como también dividirá al múltiplo de este número, 624×2, se infiere que dividiendo á las dos partes de 1440, dividirá 48 exactamente á 1440.

Fundándonos en los teoremas demostrados (106 y 107) y examinando los resultados obtenidos por la aplicación de la regla, hemos visto sucesivamente que 48 se divide á sí mismo, que divide á 192, á 624 y á 1440; luego *queda demostrado que el número* 48, *encontrado conforme á la regla, divide exactamente á los números dados* 624 *y* 1440.

2°—Vamos á demostrar que 48 *es el mayor número que puede dividirlos exactamente.*

El mayor número que puede dividir exactamente á 1440 y á 624 *no puede ser mayor que* 624, porque aunque pudiera dividir á 1440 no podría obtenerse un cociente entero dividiendo 624 por un número mayor que él. En consecuencia, debemos probar si 624 divide exactamente á 1440; pero como la primera división deja una resta, nos hace ver que 624 *no es* el máximo común divisor, y además encontramos que

$$1440=624\times 2+192$$

Esto es, 1440 se compone de dos partes: una 624×2, y la otra 192. Ahora bien, conforme al primer teorema (106) el número que divida á 624 dividirá á la parte 624×2, múltiplo de ella; pero como buscamos un divisor común de 1440 y de 624, conforme al tercer teorema (108), será preciso que este divisor divida exactamente à la otra parte 192, y en consecuencia, *no podrá ser mayor* que este número.

Por tanto debemos probar si 192 divide ó no exactamente al número menor 624. Ejecutando la división, encontramos una resta, por lo cual vemos que 192 *no es* el máximo común divisor, y además

$$624=192\times 3+48$$

Esto es, 624 consta de dos partes: 192×3 y 48. El divisor de 192 lo será de 192×3 (106), y como para que un número pueda dividir á 624 y á 192 (circunstancia indispensable para que divida á 1440), es necesario que divida á la otra parte 48 (108), resulta que el máximo común divisor *no puede ser mayor* que la resta 48.

En consecuencia, debemos probar si 48 divide ó no exactamente á 192, y como se obtiene que

$$192=48\times 4$$

sin ninguna resta, resulta que 48 *es el mayor número que puede dividir exactamente á* 624 y á 1440.

En resumen, hemos demostrado sucesivamente que el máximo común divisor:

No puede ser mayor que.............. 624
Que no es.......................... 624
Que no puede ser mayor que.......... 192
Que no es.......................... 192
Y que no puede ser mayor que........ 48

Vemos, pues, que la aplicación de la regla nos ha conducido á encontrar el número 48 que, además de dividir exactamente á 624 y 1440, es el mayor número que puede dividirlos exactamente.

113.—Observaciones.—Como en el curso de la operación las restas van disminuyendo sin cesar, forzosamente se llega á obtener un cociente exacto, aunque no sea sino cuando el divisor es la unidad, caso en que, como lo hemos dicho, los números propuestos serán primos entre sí.

Cuando una de las restas es un número primo que no divide exactamente la resta anterior, es inútil continuar la operación, pues como se sabe, el máximo común divisor debe dividir todas las restas, lo cual será imposible siendo número primo una de ellas.

Cuando dos restas consecutivas tienen un factor común, se puede suprimir éste y continuar la operación, teniendo cuidado de multiplicar el máximo común divisor que se encuentre por el factor suprimido, con el objeto de restituir el factor común de las restas, que debe ser parte integrante del máximo común divisor.

114.—Determinación de los cocientes de los números propuestos partidos por el máximo común divisor.—Supuesto que el máximo común divisor de dos números debe dividir exactamente todas las restas, se puede fácilmente obtener el número de veces que cada resta contiene al máximo común divisor.

1440	624	192	48
	2	3	4
30	13	4	1

Volvamos al ejemplo propuesto. Como 48 se contiene á sí mismo una vez, ponemos 1 debajo de 4. En seguida 192 contiene á 48 cuatro veces, que es el producto de 1 por el número que está encima de él, y este número 4 lo colocamos en la columna vertical debajo de 192, para expresar las veces que contiene esta resta al máximo común divisor. En seguida, supuesto que $624=192\times 3+48$, y que $192=48\times 4$, resulta que

$$624=48\times 4\times 3+48=48\times(4\times 3+1)=48\times 13$$

13 es el número de veces que 624 contiene á 48. Este número 13 se obtiene en la tabla multiplicando 4 por el número 3, que está encima de él, y agregando 1 que está á su derecha; debiendo observarse que 4 indica las veces que 192 contiene á 48; 3 las veces que 624 contiene á 192, 1 las veces que 48 se contiene á sí mismo.

Para determinar el número de veces que 1440 contiene á 48, multiplicaremos 13 por 2 y añadiremos 4, supuesto que

$$1440=624\times 2+192$$

y que $624=48\times 13$ y $192=48\times 4$, luego poniendo por cada cantidad su valor, resulta que

$$1440=48\times 13\times 2+48\times 4=48\times(13\times 2+4)=48\times 30.$$

En consecuencia, para determinar el número de veces que cada resta contiene al máximo común divisor, se comienza poniendo la unidad en la columna vertical debajo del último cociente; en seguida se multiplica la uni-

dad por este cociente, escribiendo el producto en la casilla de la izquierda, y se continúa multiplicando el guarismo inferior por el cociente que está sobre él, y agregando el guarismo inferior de la derecha se pone el resultado en la casilla de la izquierda.

Esta regla es de frecuente aplicación en la abreviación de los quebrados, como se verá en el número 147.

115.—Determinación del máximo común divisor de más de dos números. —Para encontrar el máximo común divisor entre más de dos números, *sin descomponerlos en sus factores primos*, se buscará primero el correspondiente á dos de los números dados; después se busca el máximo común divisor entre el hallado y otro de los números propuestos: en seguida se determina el máximo común divisor entre el último encontrado y otro de los números propuestos, continuando así la operación hasta el último número.

116. Ejemplos.—Como ejercicio pondremos las siguientes cuestiones:

1ª Descomponer (102) en sus factores primos el número 12936.

2ª Determinar (103) todos los divisores enteros del número 144.

3ª Encontrar (105) el máximo común divisor de los números 627 y 1425.

4ª Encontrar (110) el máximo común divisor de los números 477 y 1219.

5ª Encontrar (104) el menor múltiplo común á los números 2, 3, 12 y 21.

6ª Encontrar (104) el menor múltiplo común á los números 6, 8, 15, 9 y 5.

CONDICIONES

para que una cantidad sea divisible por los números menores que 12.

117.—Principios fundamentales.—Es conveniente con frecuencia, en las operaciones de aritmética, conocer con facilidad si una cantidad puede dividirse exactamente por los guarismos que representan unidades, y el objeto de este capítulo es dar á conocer los medios que pueden emplearse con tal fin, explicando sus fundamentos.

Conforme á las convenciones de nuestro sistema de numeración, resulta que toda cantidad mayor que 10, es igual á la suma de los productos de cada cifra significativa por la potencia correspondiente de 10, más las unidades simples.

Por ejemplo: $3475=3\times10^3+4\times10^2+7\times10+5.$

En consecuencia, las condiciones para que una cantidad sea divisible por un número, dependen de las propiedades del número 10, de las de sus potencias, de las de los guarismos que multiplican á estas potencias, y de las del guarismo que representa las unidades.

Los números primos menores que 10, son 2, 3, 5 y 7, por lo cual pueden hacerse las siguientes descomposiciones de la base de la numeración.

$$10=2\times5$$
$$10=3\times3+1=3^2+1=9+1$$
$$10=7\times1+3$$

118.—Siendo $10=2\times5$

inferiremos (106) que *todas las potencias y los múltiplos de 10 son divisibles por 2 y por 5.*

Si elevamos á la 2ª potencia estas dos cantidades, cuyos valores son iguales, tendremos:

$$10^2=2^2\times5^2$$

esto es, $100=4\times25$

de donde inferimos *que 100 y todos sus múltiplos son divisibles exactamente por 4 y por 25.*

Si elevamos á la 3ª potencia $10=2\times5$

tendremos $10^3=2^3\times5^3$

esto es, $1000=8\times125$

luego 1000 y todos sus múltiplos son divisibles por 8 y por 125.

Siendo cualquiera potencia de 10 igual al producto de los factores primos 2 y 5 elevado cada uno de ellos á la misma potencia, (por ejemplo $10^4=2^4\times5^4$) y siendo tanto 2 como 5 números primos con 3, se infiere que *ninguna potencia de 10 será divisible exactamente por 3* por ser indivisibles por 3 los factores de que consta.

Igualmente, *toda potencia de 10 es indivisible por 7, por ser 7 primo de los factores de 10.*

Siendo $10=3\times3+1$

si dividimos 10 entre 3, obtendremos 3 por cociente *y 1 por resta.*

La resta del producto de $10\times10=100$ dividido entre 3, será igual (109,) á la que resulte de dividir el producto de las restas 1×1 de los factores por 3, esto es, *también será* 1.

Siendo $1000=100\times10$

la resta que queda al dividir 1000 entre 3 será igual (109) á la que resulte de dividir el producto de las restas 1×1 de los factores por 3, esto es, *también será* 1.

Y como el producto de 1 por 1 es 1, inferimos que *cualquiera potencia de* 10 *dividida por* 3 *da por resta* 1.

Siendo $$10=9+1$$

si dividimos 10 entre 9, la resta será 1, y conforme á lo que acabamos de explicar refiriéndonos á 3, inferiremos igualmente que *cualquiera potencia de* 10 *dividida por* 9 *dará* 1 *por resta.*

Estas propiedades de 10 y de sus potencias, así como los cuatro teoremas establecidos en los números 106 á 109, servirán de fundamento á lo que vamos á exponer.

119.—*Siempre que sea cero el último guarismo de una cantidad, ésta será divisible exactamente por* 10.

Demostración.—Todo número que termina en cero, conforme á las convenciones del sistema de la numeración, es un múltiplo de 10, por ejemplo:

$$3850=385\times10$$

y como por una parte 10 se divide exactamente á sí mismo, y por otra siempre que un número divide á otro, divide igualmente á todos sus múltiplos (106), se deduce que cuando el último guarismo de una cantidad sea cero, ésta será divisible por 10.

120.—*Siempre que sea* 0, *ó* 5 *la última cifra de una cantidad, ésta será divisible exactamente por* 5.

Demostración.—Si la cantidad termina en cero, como $380=38\times10$, será múltiplo de 10; y como 5 divide exactamente á 10, se infiere que dividirá también á cualquier múltiplo de 10 (106), esto es, á cualquiera número que termine en 0.

Si la cantidad termina en 5, como 385, la podremos descomponer en dos partes.

$$385=380+5$$

de las que la primera 380 será divisible por 5 por ser múltiplo de 10 y la segunda también lo será, por ser 5; y siendo las dos partes de la cantidad divisibles por 5, inferiremos (107) que la cantidad total 385 también lo será.

121.—*Siempre que sea cero ó par la última cifra de una cantidad, ésta será divisible exactamente por* 2.

Demostración.—Si la cantidad termina en 0, como 370, será múltipla de 10; y como 2 divide exactamente á 10, se infiere (106) que dividirá también á cualquier número terminado en 0 por ser múltiplo de 10.

Si la cantidad termina en cifra par, como 738, la podremos descomponer en dos partes:

$$738=730+8$$

de las que la primera será divisible por 2 por ser múltipla de 10, y la segunda 8, por ser par; luego siendo las dos partes de la cantidad divisibles por 2 (107) inferiremos que la cantidad total 738 también lo será.

122.—*Una cantidad será exactamente divisible por* 4, *siempre que sus dos últimas cifras sean ceros ó formen un número divisible por* 4.

Demostración.—Hemos visto (118) que 100 es divisible exactamente por 4, por ser $100=2^2\times5^2$, luego cualquier número terminado en dos ceros, como $3500=35\times100$, será divisible por 4, por ser múltiplo de 100.

Cuando las dos últimas cifras forman un número divisible por 4, como 3548, podemos descomponerlo en dos partes:

$$3548=3500+48$$

de las que la primera 3500 será divisible por 4, porque expresando centenas será múltipla de 100, luego si la otra parte 48 es divisible por 4, resultará, que siendo las dos partes de la cantidad divisibles por 4 (107) lo será también ésta.

123.—*Cuando las tres últimas cifras de una cantidad sean ceros, ó formen una cantidad divisible exactamente por* 8, *la cantidad será divisible por* 8.

Demostración.—Hemos visto (118) que por ser $1000=2^3\times5^3$, este número es divisible exactamente por 8; luego cualquiera cantidad que termine en tres ceros, como $73000=73\times1000$, será divisible por 8 por ser múltipla de 1000 (106).

Siempre que las tres últimas cifras formen un número divisible por 8, como 73864, podemos descomponer la cantidad en dos partes:

$$73864=73000+864$$

de las que la primera siempre será divisible por 8; porque expresando millares será múltipla de 1000; luego si la otra parte, formada de las tres últimas cifras es un número, como 864, divisible exactamente por

8, resultará que la cantidad total 73864 también lo será, por serlo las dos partes de que se compone (107).

124.—*Una cantidad será divisible exactamente por 3, cuando lo sea la suma de las cifras significativas que la representen.*

Por ejemplo, la cantidad 582 será divisible por 3 si la suma de las cifras significativas $5+8+2$ dá un número, como 15, divisible por 3.

DEMOSTRACIÓN.—Hemos visto (118) que *cualquiera potencia de* 10, *dividida por* 3 *da por resta* 1, por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} 10&=3\times3+1\\ 100&=3\times33+1\\ 1000&=3\times333+1\\ 10000&=3\times3333+1\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Toda cantidad conforme al sistema de la numeración, está compuesta de la suma de los productos de cada cifra significativa por la potencia respectiva de 10, más las unidades, por ejemplo:

$$582=5\times100+8\times10+2$$

Si en esta ecuación sustituimos en lugar de 100 su valor $3\times33+1$, y en lugar de 10 su igual $3\times3+1$, tendremos:

$$582=5\times(3\times33+1)+8\times(3\times3+1)+2$$

ejecutando las multiplicaciones resulta:

$$582=(5\times3\times33)+5+(8\times3\times3)+8+2$$

ordenando: $582=(5\times3\times33)+(8\times3\times3)+5+8+2$

siendo divisibles exactamente por 3, las dos partes $(5\times3\times33)$ y $(8\times3\times3)$ por ser múltiplas de 3, resulta que siempre que la otra parte $5+8+2$, formada de la suma de las cifras significativas de la cantidad sea un número, como 15, divisible por 3, la cantidad 582 lo será, por serlo todas las partes de que consta.

125.—*Una cantidad será divisible exactamente por* 9 *cuando lo sea la suma de las cifras significativas que la representan.*

Por ejemplo, la cantidad 864 será divisible por 9 cuando la suma de sus cifras significativas $8+6+4$ sea un número, como 18, divisible por 9.

DEMOSTRACIÓN.—Hemos visto (118) que *cualquiera potencia de* 10 *dividida por* 9 *da* 1 *de resta*, por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} 10&=9\times1+1\\ 100&=9\times11+1\\ 1000&=9\times111+1\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Toda cantidad conforme al sistema de numeración, se compone de la suma de los productos de cada cifra significativa por la potencia respectiva de 10, más las unidades, esto es,

$$864=8\times100+6\times10+4$$

Si en esta ecuación sustituimos en lugar de 100 su valor $9\times11+1$, y en lugar de 10 su igual $9\times1+1$, tendremos:

$$864=8\times(9\times11+1)+6\times(9\times1+1)+4$$

Ejecutando las multiplicaciones resulta:

$$864=(8\times9\times11)+8+(6\times9\times1)+6+4$$

ordenando: $864=(8\times9\times11)+(6\times9\times1)+8+6+4$

siendo divisibles exactamente por 9 las partes $(8\times9\times11)$ y $(6\times9\times1)$ por ser múltiplas de 9, resulta que siempre que la otra parte $8+6+4$ formada de la suma de las cifras significativas de la cantidad sea un número como 18, divisible por 9, la cantidad 864 lo será, por serlo todas las partes de que consta.

* (126).—Para explicar el fundamento de la regla que sirve para averiguar si una cantidad es divisible por 7, demostraremos préviamente el siguiente

TEOREMA.—*La resta que queda al dividir una cantidad por un número, es la misma que la que resulta de dividir por este número la suma de los productos que se obtienen multiplicando respectivamente cada una de las cifras que en la cantidad representa unidades, decenas, centenas, etc., por cada una de las restas que queda en la división de 1, de 10, de 100, etc., por el divisor propuesto.*

Para facilitar nuestro razonamiento, aplicable á cualquiera cantidad y á cualquier divisor, nos serviremos de la cantidad 586 y del divisor 7.

Conforme á las convenciones del sistema de numeración

$$586=6\times1+8\times10+5\times100\,.........(1)$$

Si sucesivamente dividimos 1, 10 y 100 por 7, obtendremos:

$1\div7$ da por cociente 0 y por resta........1
$10\div7$ da por cociente 1 y por resta........3
$100\div7$ da por cociente 14 y por resta.......2

y vamos á demostrar que

$$\text{resta de } 586 \div 7 = \text{resta de } (6\times1+8\times3+5\times2)\div 7.$$

En efecto, siendo
$$1=7\times0+1$$
$$10=7\times1+3$$
$$100=7\times14+2$$

si substituimos estos valores en la ecuación (1), obtendremos:

$$586=6(7\times0+1)+8(7\times1+3)+5(7\times14+2)$$

ejecutando las multiplicaciones indicadas:

$$586=(6\times7\times0)+6\times1+(8\times7\times1)+8\times3+(5\times7\times14)+5\times2$$

ordenando los sumandos se tiene:

$$586=(6\times7\times0)+(8\times7\times1)+(5\times7\times14)+6\times1+8\times3+5\times2$$

Como si cantidades iguales se dividen por iguales, los resultados serán iguales, tendremos:

$$\frac{586}{7}=\frac{(6\times7\times0)}{7}+\frac{(8\times7\times1)}{7}+\frac{(5\times7\times14)}{7}+\frac{6\times1+8\times3+5\times2}{7}$$

y como los dividendos de las tres primeras partes del segundo miembro de esta ecuación, por ser múltiplos de 7, al dividirlos por este número dan cero por resta, tendremos finalmente que

$$\text{resta de } 586\div7=\text{ resta de } (6\times1+8\times3+5\times2)\div7$$

que es lo que teniamos que demostrar.

Como habrá podido observarse, cuando sabemos que una potencia de 10, dividida por 7, por ejemplo 100, deja por resta 2, para el objeto de que ahora tratamos no es necesario conocer la parte que es múltipla de 7. En efecto, tenemos:

$$100=7\times14+2$$
5 centenas $$500=(5\times7\times14)+5\times2$$

dividiendo por 7, resulta:

$$\text{resta de } \frac{500}{7}=\text{ resta de } \frac{(5\times7\times14)}{7}+\frac{5\times2}{7}$$

pero como la parte que hemos escrito dentro de paréntesis es múltipla de 7, no necesitamos conocerla, supuesto que dará cero por resta, é inferimos que

$$\text{resta de } 500\div7=\text{ resta de } 5\times2\div7$$

siendo 5 la cifra que representa centenas y 2 la resta que queda en la división de 100 entre 7.

Para determinar las condiciones de divisibilidad de una cantidad por 7 vamos á fundarnos en el teorema que acabamos de demostrar y el cual pueden aplicar los alumnos á cualquiera otro divisor.

Las restas de 10 y de todas sus potencias es fácil determinarlas, recordando (109) que la resta de la división del producto es la misma que la que se obtiene dividiendo por el número dado el producto de las restas que hayan resultado al dividir los factores.

1	dividido por 7 da 0 por cociente y por resta	.. 1
10	" 7 " 1 " "	.. 3
$100=10\times10$	" 7 dará por resta la misma que $\frac{3\times3}{7}$	... 2
$1000=10\times100$	" 7 " " " $\frac{3\times2}{7}$	... 6
$10000=10\times1000$	" 7 " " " $\frac{3\times6}{7}$	... 4
$100000=10\times10000$	" 7 " " " $\frac{3\times4}{7}$	... 5

Desde la sexta potencia de 10 en adelante volverán á encontrarse las mismas restas 1, 3, 2, 6, 4 y 5, y en igual orden, por lo cual se llaman estos números *período* de la división por 7.

Una vez conocidos los números que forman el *período* de la división por 7 en nuestro sistema de numeración, podemos establecer la siguiente:

Regla.—*Para conocer si una cantidad es divisible por* 7 *se escriben debajo de los guarismos que la representan, de derecha á izquierda, los números del período* 1, 3, 2, 6, 4 *y* 5 *las veces que sea necesario: se multiplica cada cifra de la cantidad por la que está debajo de ella y se suman los productos. Cuando por constar esta suma de muchos números no es fácil determinar si es divisible por* 7, *se escriben debajo de los guarismos de la suma los correspondientes del período, se multiplican respectivamente y se suman los productos. Si la suma obtenida es divisible por* 7, *lo será la cantidad propuesta.*

Ejemplo.—Se quiere saber si el número 35.883,694 es divisible por 7. Para esto se escriben debajo de los guarismos de esta cantidad los del período, se multiplican respectivamente y se suman los productos como se ve en seguida:

	PRODUCTOS.		PRODUCTOS.
Cantidad propuesta 35883694	$1\times4=4$	Cantidad 147	$1\times7=7$
Período de 7......31546231	$3\times9=27$	Período..231	$3\times4=12$
	$2\times6=12$		$2\times1=2$
	$6\times3=18$		—
	$4\times8=32$		21
	$5\times8=40$		
	$1\times5=5$	Siendo 21 divisible por	
	$3\times3=9$	7 lo será la cantidad	
	—	35883694	
	147	séptima parte 5126242	

Demostración.—La cantidad propuesta

$$35.883,694=4+9.10+6.10^2+3.10^3+8.10^4+8.10^5+5.10^6+3.10^7$$

Si dividimos por 7 los dos miembros de esta ecuación, la resta que quede al dividir la cantidad 35.883,694, conforme al teorema demostrado al principio de este párrafo, será igual á la que resulte de dividir por dicho número la suma de los productos de cada una de sus cifras significativas por el guarismo correspondiente del período 1, 3, 2, 6... de la división de 7; luego si la división de la suma de estos productos no deja resta, la cantidad propuesta será exactamente divisible por 7.

* (127.)—Condiciones para que una cantidad sea divisible por 11.— Para determinar éstas seguiremos un procedimiento semejante al que hemos empleado para averiguar cuándo un número es divisible por 7, y por 9; pero como el divisor 11 es mayor que 10, consideraremos la cantidad formada de la suma de los productos de 1, 100, 100^2 y las potencias sucesivas de 100 multiplicadas por factores formados de dos en dos cifras. Por ejemplo, el número 5758192 lo consideraremos formado de las partes $92\times1+81\times100+75\times100^2+5\times100^3$ En seguida determinaremos las restas que resultan de la división de 1, 100, 100^2 y de las potencias sucesivas de 100 entre 11; multiplicaremos estas restas por los factores correspondientes á cada parte, y la suma de estos productos deberá ser divisible por 11 para que lo sea toda la cantidad.

1 dividido por 11 da por resta 1
100 dividido por 11 da por resta 1,

luego 100^2 dividido por 11, dará por resta 1, supuesto que la resta del

producto de dos cantidades 100×100, es igual á la que resulta de dividir el producto de las restas 1×1 de los factores (109).

Por la misma razón, todas las potencias de 100 divididas por 11 darán 1 por resta.

Tenemos que $5758192=92\times1+81\times100+75\times100^2+5\times100^3$

Si dividimos el número 5758192 por 11, la resta de la división será igual á la que resulte de dividir la suma de las restas de las partes que lo forman por 11; pero la de cada parte $92\times1,81\times100,75\times100^2$ y 5×100^3 es igual á la del factor de 1, de 100, y de las potencias de 100, supuesto que la resta de 1, de 100 y de las potencias de 100 son la unidad (109); luego la resta que resulte de dividir el número 5758192 por 11 será igual á la que dé la división de la suma de los factores $92+81+75+5$. La suma de estos factores es 253; considerando esta cantidad compuesta de las partes $53\times1+2\times100$ y raciocinando como antes, inferiremos que 253 dividido por 11, dará la misma resta que la suma de los factores $53+2$, pero como 55 es divisible exactamente por 11, deduciremos que lo será 253, y en consecuencia la cantidad 5758192.

En resumen, se ve que una cantidad será divisible por 11 cuando lo sea la suma de los períodos de dos en dos guarismos de que está formada, contando de derecha á izquierda. Tal es el fundamento de la siguiente

Regla.—*Para conocer si un número es divisible por 11, se le divide en períodos de dos en dos cifras, contando de derecha á izquierda; se suman estos períodos y si la suma es divisible exactamente por 11, lo será el número propuesto. Cuando la suma de los períodos consta de más de dos cifras, se dividirá en períodos de dos en dos guarismos, comenzando por las unidades, y se sumarán éstos; si su suma es divisible por 11, lo será el número propuesto.*

Ejemplo.—Queremos determinar si el número 25802458 es divisible por 11.

25802458
58
24
80
25
187
87
1
88

Como se ve al lado, descompondremos el número en períodos de dos en dos cifras contando de derecha á izquierda, y los sumaremos. No pudiéndose determinar á primera vista si la suma 187 es divisible por 11, lo descompondremos en períodos de dos cifras, y como su suma es 88, número divisible exactamente por 11, inferiremos que el número propuesto 25802458 también será divisible por 11. Se conoce que un número menor que 100 es múltiplo de 11 en que el guarismo de las decenas es igual al de las unidades, como 22, 33, 44, etc.

Indicaremos otro método que se emplea frecuentemente para determinar si una cantidad puede ser exactamente divisible por 11.

Regla.—*Para conocer si un número es divisible por* 11, *se suman separadamente los guarismos de orden par y los de orden impar; se busca la diferencia entre las dos sumas, y si esta diferencia es* 0 *ó un número divisible exactamente por* 11 *lo será la cantidad propuesta.*

Ejemplo.—Sea por averiguar si el número 85650983 es divisible por 11.

85650983	
3	8
9	0
5	6
5	8
22—22=0	

Sumaremos los guarismos de orden impar, 3, 9, 5 y 5, y separadamente los de orden par 8, 0, 6, y 8. Siendo las dos sumas iguales, la diferencia es 0, por lo cual conoceremos que el número propuesto es divisible exactamente por 11. Otras veces la diferencia de las dos sumas es 11 ó un múltiplo de ese número.

Demostración.—Determinando el período de las restas que resultan de dividir 1, 10, 10^2 y las potencias sucesivas de 10 se obtiene que

1 dividido por 11 da por resta 1
10 dividido por 11 da por resta 10
10^2 dividido por 11 da por resta 1
10^3 dividido por 11 da por resta 10

y así sucesivamente; por lo que el período de las restas es 1 y 10.

Un número cualquiera

$$5896=6\times 1+9\times 10+8\times 10^2+5\times 10^3$$

dividido por 11, dará la misma resta que la suma de los productos de sus cifras significativas por los números correspondientes del período 1 y 10. En consecuencia, el número propuesto 5896 será divisible por 11 cuando lo sea la suma de los productos

$$6\times 1+9\times 10+8\times 1+5\times 10$$

Para determinar fácilmente si será divisible por 11 la suma de esos productos observaremos que cualquiera cantidad multiplicada por 10 es igual al producto de la misma cantidad por 11, menos dicha cantidad. Por ejemplo, $3\times 10=3\times 11-3$; porque aumentándose al multiplicador una unidad, deberemos restar el multiplicando 3 para que no se altere el producto 3×10. Si en la suma de los términos anteriores ponemos en lugar de 9×10 su igual $(9\times 11)-9$, y en lugar de 5×10 su igual $(5\times 11)-5$, tendremos:

$$6\times 1+9\times 10+8\times 1+5\times 10=6+(9\times 11)-9+8+(5\times 11)-5$$

Si dividimos por 11 el segundo miembro de esta ecuación, siendo las partes (9×11) y (5×11) divisibles exactamente por 11, el resultado de la división dependerá del que den las otras partes:

$$6-9+8-5=6+8-9-5=[6+8]-[9+5]$$

supuesto que lo mismo es restar de la suma $6+8$ primero 9 y en seguida 5 que restar de una vez la suma $9+5$. En último análisis, se ve que el número 5896 será divisible por 11 cuando la diferencia que hay entre $6+8$, suma de los guarismos de orden impar, y $9+5$, suma de los de orden par, sea cero ó un número divisible por 11.

Esta 2ª regla sirve para averiguar facilmente si un número es divisible por 11; pero por medio de ella *no siempre* se determina *la resta* que dejaría la división de un número por 11. La razón de esto es que para facilitar el procedimiento, hemos agregado y quitado 10, lo cual no altera el valor del resultado, pero sí el del cociente y el de la resta. Por ejemplo, siendo $30=3\times 10=3\times 11-3$, tenemos que

$$30\div 11=2+\tfrac{8}{11}$$
$$30\div 11=3-\tfrac{3}{11}$$

resultados de igual valor, pero en los que los cocientes y las restas son distintos.

128.—Teorema.—*Si una cantidad es divisible separadamente por dos números primos entre sí, lo será igualmente por el producto de estos dos números.*

Si por ejemplo, 60 es divisible separadamente por 10 y por 3, números primos entre sí, decimos que 60 será divisible por 30, producto de 10 por 3.

Supuesto que 60 es divisible exactamente por 10, será múltiplo de este número, y tendremos:

$$60=10\times 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Por otra parte, en razón de que 60 es divisible igualmente por 3, tendrá que ser múltiplo de este número, esto es, 3 debe entrar forzosamente como factor en la formación de 60. Ahora bien, como

$$60=10\times 6$$

el divisor 3 tiene que servir de factor para producir 10, ó 6; pero como 10 no puede ser múltiplo de 3, por ser 10 y 3 números primos entre sí, se infiere que el otro factor 6 de 60 tendrá que ser múltiplo de 3. En este ejemplo, tendremos:

$$6=3\times 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Substituyendo este valor en la ecuación (1) se obtiene finalmente:

$$60=10\times3\times2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ecuación que nos hace ver que 60 es múltiplo del producto de los números primos 10 y 3, por lo cual será divisible por 30, que es lo que debíamos demostrar.

Debe observarse que este teorema *solo se verifica cuando los divisores son primos entre sí* Así, 12 que es divisible por 2 y por 4 no será divisible por su producto 8, por que no siendo 2 y 4 números primos entre sí, el divisor 4 contiene como factor el otro divisor 2. Descomponiendo 12 en sus factores se ve en efecto que no contiene á 8, pues $12=2\times2\times3=4\times3$.

129.—*Cuando una cantidad sea divisible por* 2 *y por* 3, *será igualmente divisible por* 6.

Porque siendo 2 y 3 números primos entre sí, conforme al teorema demostrado en el párrafo anterior, una cantidad divisible por estos dos números lo será por su producto 6.

130.—*Cuando una cantidad sea divisible por* 3 *y por* 4, *lo será por su producto* 12.

Porque 3 y 4 son números primos entre sí, y 12 es su producto [128.]

131.—En resumen, según se ha visto, *una cantidad es divisible*:

1º *Por* 2 *y por* 5 *cuando sus unidades lo son:* porque siendo siempre las decenas divisibles por 2 y por 5, cuando lo sean las unidades lo serán sus dos partes.

2º *Por* 10 *cuando carece de unidades*, por ser múltiplo de 10.

3º *Por* 4 *cuando el conjunto de unidades y decenas forman una parte divisible por* 4; porque siendo $100=4\times25$, cuando las decenas y unidades forman un número divisible por 4 lo serán sus dos partes.

4º *Por* 8, *cuando la parte compuesta de centenas, decenas y unidades es divisible por* 8; porque siendo $1000=8\times125$, si el grupo de centenas, decenas y unidades es divisible por 8 lo serán sus dos partes.

5º *Por* 3, *cuando la suma de todos los guarismos que forman la cantidad dé un múltiplo de* 3, porque 10 y todas sus potencias divididas por 3 dan 1 de resta.

6º *Por* 9, *cuando la suma de los guarismos que forman la cantidad es un múltiplo de* 9, por la misma razón.

7º *Por* 6, *cuando sea divisible por* 3 *y por* 2; porque 6 es el producto de estos dos números primos entre sí.

8º *Por* 12, *cuando el número sea divisible por* 3 *y por* 4, por igual razón.

PRUEBAS DE LA MULTIPLICACION Y DIVISION DE ENTEROS.

132.—Teorema.—*Cuando se suman las cifras significativas de una cantidad hasta reducirla á unidades simples* (70), *se obtiene una cifra igual á la resta que daría la cantidad dividida por* 9.

Demostración.—Un número cualquiera como 326 puede descomponerse en las partes siguientes, conforme al sistema de numeración:

$$326=3\times100+2\times10+6$$

sustituyendo por 100 y por 10 sus valores:

$$100=9\times11+1$$
$$10=9+1$$

tendremos: $$326=3(9\times11+1)+2(9+1)+6$$

ejecutando la multiplicación:

$$326=(3\times9\times11)+3+(2\times9)+2+6$$

pero como las partes puestas dentro de los paréntesis son múltiplas de 9, resulta que dividiendo por 9 los dos miembros de esta ecuación:

$$\text{resta de } \frac{326}{9}=\text{resta de } \frac{3+2+6}{9}$$

Para determinar la resta que daría la división por 9 de la suma de las cifras significativas de la cantidad

$$3+2+6=11$$

descompondremos 11 en sus partes como sigue:

$$11=1\times10+1=1\times[9+1]+1=1\times9+1+1$$

dividiendo por 9 los dos miembros de esta ecuación, resulta:

$$\text{resta de } \frac{11}{9}=\text{resta de } \frac{1+1}{9}=2$$

luego resta de $\frac{326}{9}$ es 2, y por tanto cuando se reduce una cantidad á unidades simples, se determina la resta que daría dividiéndola por 9.

Demostración de la regla del número 70.—Si sabemos, por ejemplo, que

$$346\times876=303096$$

tendremos: resta de $\frac{346\times876}{9}$ = resta de $\frac{303096}{9}$

Como por una parte si el producto de dos factores y cada uno de ellos se dividen separadamente por un número como 9, la resta que queda en la división del producto, es igual á la que resulta de dividir el producto de las restas de los dos factores por el mismo número [109], y por otra, la resta que queda en la división de un número por 9 es igual á la cifra que resulta de reducir á unidades simples este número [132], se infiere que cuando no se ha cometido error en una multiplicación, el producto reducido á unidades simples debe dar una cifra igual á la que se obtiene de multiplicar las cifras que han resultado de los factores reducidos á unidades.

En nuestro ejemplo: resta de $\frac{4\times3}{9}$ debe ser igual á 3, resta de la división del producto.

133.—Demostración de la regla del número 87.—Si dividiendo, por ejemplo, 303104 entre 634 se obtiene 478 como cociente y 52 por resta, como el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más la resta, tendremos:

$$303104=634\times478+52$$

y como si con cantidades iguales se ejecutan operaciones iguales, los resultados serán iguales, tendremos:

resta de $\frac{303104}{9}$ = resta de $\frac{634\times478}{9}$ + resta de $\frac{52}{9}$

pero como por una parte la resta que queda de la división de un número por 9 es la cifra que resulta de reducirlo á unidades simples (132), y por otra la resta que queda en la división del producto, es igual á la que resulta de dividir el producto de las restas de los factores por el mismo número (109), se infiere que cuando no se ha cometido error en una división de enteros, el dividendo reducido á unidades simples debe dar una cifra igual á la que se obtiene de reducir á unidades simples

el producto del divisor por el cociente más la resta reducidos cada uno de estos números á unidades simples.

En nuestro ejemplo debe resultar 2, cifra del dividendo, igual á $4\times1+7$ reducido á unidades, igual á 2.

Estas reglas son aplicables aun cuando las cantidades sean múltiplas de 9, lo cual se conoce en que reducidas á unidades simples dan la cifra 9.

134.—Estas pruebas pueden dar resultados falsos, cuando se ha cometido algún error en la prueba, ó cuando se ha invertido la colocación de los guarismos. Cuando se quiere averiguar esto, pueden buscarse las restas de la división de los términos y de los resultados de la multiplicación ó división por otro número; comunmente se escoge por divisor el número 11, sumando los guarismos divididos en periodos de dos en dos comenzando por la derecha.

* (135).—Observaciones sobre el cálculo de los números enteros.—En lo que hemos expuesto se habrá observado que el sistema de numeración está fundado en formar unidades superiores constantemente iguales al conjunto de diez de la especie menor. Para denominar los números nos servimos de pocos términos que combinados dan una idea de su valor; y con el objeto de representarlos con pocos guarismos, se les ha dado á éstos, además de su valor propio, otro relativo ó de posición, que crece de derecha á izquierda en la misma relación que las potencias sucesivas de 10; sirviendo el cero para indicar la carencia de cualquier orden de unidades y conservar á los demas guarismos el valor que les coresponde. Un número cualquiera es igual á la suma de los productos de cada cifra significativa multiplicada por la potencia de 10 correspondiente al orden de sus unidades, más las unidades simples.

El fundamento de la ejecución de las operaciones de enteros consiste en dividir éstos en las partes del sistema de numeración de que están compuestos, esto es, en unidades, decenas, centenas, etc., y ejecutar las operaciones con estas partes. Con excepción de la división, las operaciones se comienzan por las unidades de especie menor. El objeto de cada operación es engendrar un número nuevo, de un modo peculiar á la naturaleza de cada operación.

Para la adición y substracción es condición indispensable que las cantidades sean homogéneas, y el resultado de estas operaciones es de la misma especie que los datos de la cuestión. En la multiplicación el producto es de la especie del multiplicando, y al multiplicador se le puede considerar como abstracto. En la división la pregunta determina la especie del cociente.

La suma consta de tantas unidades como todos los sumandos juntos y es siempre mayor que uno y que varios sumandos. La resta consta de las unidades que le faltan al substraendo para ser igual al minuendo, y es siempre menor que este término. El producto de una multiplicación de números enteros, generalmente es mayor que los factores que lo han formado, y tantas veces mayor que un factor, como unidades tiene el otro; pero la multiplicación no siempre da el resultado de aumento que el significado de esta palabra envuelve en el lenguage común: el objeto de esta operación es engendrar un número que tenga con el multiplicando la misma relación que el multiplicador tiene con la unidad; por esto, una cantidad multiplicada por la unidad no aumenta sino que da la misma cantidad, y multiplicada por cero produce cero. El cociente de una división que no ha dado resta, es tantas veces menor que el dividendo como unidades tiene el divisor. Cuando la división no resulta exacta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más la resta.

La regla dada en la substracción para el caso de que uno ó varios guarismos del substraendo sean mayores que los correspondientes del minuendo, se funda en que la diferencia entre dos cantidades no se altera cuando se les agrega una misma cantidad. Las abreviaciones indicadas para los casos de la multiplicación y de la división, se fundan en las convenciones del sistema de numeración, haciéndose el valor de una cantidad 10 veces mayor por cada cero que se le agrega á la derecha, y disminuyéndose proporcionalmente cuando se suprimen ceros: en que toda cantidad multiplicada ó dividida por la unidad, da la misma cantidad: en que todo número multiplicado por 0 produce 0, y en que el cociente no se altera cuando se multiplican ó dividen por un mismo número el dividendo y el divisor. El resultado de la adición, substracción y multiplicación de los enteros siempre es número entero; pero el resultado de la división unas veces es entero y otras una fracción ó un número fraccionario.

Las propiedades de los factores y de los divisores de los números enteros, se han deducido de las de los números primos, y de las de las partes en que las cantidades pueden descomponerse. Unas veces se han descompuesto los números en las partes del sistema de numeración que los forman; otras en los factores de que constan, y otras en productos de determinado divisor, más una resta. De tales fundamentos, se han deducido las reglas correspondientes para encontrar los factores y divisores de un número, para determinar el máximo común divisor, y para obtener el menor múltiplo común á varios números. Por último, fundándose en las propiedades del número 10 y de sus potencias divididas por los primeros números primos, hemos fijado las condiciones que debe satisfacer una cantidad para que sea divisible por los números inferiores á 12.

CALCULO DE LAS FRACCIONES COMUNES Y DE LOS NUMEROS FRACCIONARIOS.

SISTEMA DE NUMERACIÓN, PRINCIPIOS Y OPERACIONES FUNDAMENTALES.

136.—Definiciones.—Vamos á tratar en este capítulo del modo de calcular con las cantidades, cuyos valores estén comprendidos entre 0 y la unidad, ó entre dos números enteros consecutivos. Cuando decimos que tenemos tres cuartas partes de vara, el valor de la cantidad es mayor que cero y menor que una vara, y cuando decimos que tenemos 8 varas y 5 sextas partes de vara, este es un valor comprendido entre 8 y 9 varas.

Si tuviéramos que dividir, por ejemplo, 25 pliegos de papel entre cuatro personas, como $25 \div 4$ les toca á 6 y sobra 1; daríamos 6 pliegos enteros á cada persona, y debiendo repartir el pliego sobrante entre cuatro, lo partiríamos en cuatro pedazos iguales y daríamos uno de ellos á cada persona. Cada uno de estos pedazos es menor que la unidad y es la cuarta parte de ella. Se representa por $\frac{1}{4}$ de pliego, y se lee un cuarto de pliego.

Si tuviéramos que repartir 29 manzanas entre 8 niños; como $29 \div 8$ les toca á 3 y sobran 5: daríamos 3 manzanas á cada niño y para distribuir entre ellos las 5 sobrantes, por ser 8 los niños, cada manzana la partiríamos en 8 pedazos iguales y dando cinco de estos pedazos á cada niño resulta que recibiría en conjunto 3 manzanas enteras y 5 octavas partes de una manzana. Este resultado se representa por $3+\frac{5}{8}$ de manzana, y se lee: 3 más 5 octavos de manzana.

Estos números como $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{8}$ menores que la unidad se llaman *quebrados*. Los números como $3+\frac{5}{8}$ se llaman *mixtos*, y cuando el número mixto tiene la forma de quebrado se le llama *fraccionario*, como $\frac{6}{4}=\frac{4}{4}+\frac{2}{4}=1+\frac{2}{4}$. En un quebrado como $\frac{5}{8}$, el número 8 que indica en cuántas partes se considera dividida la unidad se llama *denominador*, y el número 5 que expresa de cuántas de estas partes consta el quebrado se llama *numerador*.

Considerando el peso dividido en 4 partes, las pesetas son fracciones del peso y se indican por $\frac{1}{4}\$$ por $\frac{2}{4}\$$ y por $\frac{3}{4}\$$. Considerando el peso dividido en 8 partes, los reales son octavos de peso, y así cinco reales equivale á $\frac{5}{8}\$$, cinco octavos de peso.

Si el día se considera dividido en dos partes, cada una de ellas será medio día, y si lo consideramos dividido en 24 partes, cada una de ellas será un veinticuatroavo de día, y en lugar de estimar el tiempo en horas y de decir una hora, 5 horas, podremos hacerlo dando á estos valores la forma de fracciones é indicar $\frac{1}{24}$ día, un veinticuatroavo de día, $\frac{5}{24}$ día, cinco veintícuatroavos de día.

Se comprende que el valor de un quebrado depende de la relación que existe entre los dos números que lo representan, y que cambiando estos números podremos obtener un valor que se acerque á la unidad ó que se aleje de ella tanto como se quiera.

Se llaman fracciones ó quebrados, los números que representan las cantidades menores que la unidad; como un quinto, dos tercios, etc.

Se llaman números mixtos, los que constan de unidades enteras y de partes de la unidad, como 82 y 3 octavos.

Se llaman fraccionarios los números mayores que la unidad que tienen la forma de quebrados, como $\frac{6}{4}$.

137.—Sistema de numeración.—Para tener una idea exacta del valor de una fracción es necesario conocer dos cosas: 1.°, en cuántas partes está dividida la unidad: 2.°, de cuántas de estas partes consta la fracción; por lo cual tanto para representar como para denominar una fracción es preciso escribir y expresar los números que indican el valor de estas dos cosas.

Los quebrados se representan por medio de dos guarismos puestos uno sobre otro, separados por una raya, de este modo: $\frac{5}{8}$. El número que se pone encima se llama *numerador y expresa el número de partes de la unidad de que consta el quebrado*. El número que se pone abajo se llama *denominador y expresa el número de partes en que está dividida la unidad*. Al numerador y al denominador juntos se les llama *términos del quebrado*.

Para leer las fracciones ó quebrados se lee primero el numerador como número entero y en seguida el denominador, como número *partitivo*, esto es, se dice medios, cuando el denominador es 2; tercios, cuando es 3; cuartos, cuando es 4; quintos, cuando es 5; sextos, cuando es 6; séptimos, cuando es 7; octavos, cuando es 8; novenos, cuando es 9; décimos, cuando es 10; y de 10 en adelante se agrega la terminación *avos*, al nombre del número del denominador

Por ejemplo: $\frac{7}{9}$ se lee: siete novenos.

$\frac{345}{872}$ se lee: 345, 872 avos.

Para escribir los números fraccionarios ó mixtos se ponen los enteros y á continuación los quebrados, separados generalmente por el signo + más, y se leen primero los enteros y á continuación la fracción como acaba de explicarse

$72+\frac{3}{12}$ se lee: 72 unidades y 3 doceavos.

El valor de un quebrado depende de la relación que existe entre el valor del numerador y el del denominador, y no de la magnitud de sus términos; por esto es, que, por ejemplo:

$\frac{3}{4}$ hora$=\frac{6}{8}=\frac{45}{60}$.

no obstante que los números que representan los tres quebrados son muy distintos.

138.—Quebrados propios é impropios.—Según la representación que tiene cada uno de los términos del quebrado, resulta: 1° que mientras más se aproxima el numerador al denominador, más se acercará el valor del quebrado á la unidad; 2°, que cuando el numerador sea igual al denominador, el quebrado será igual á la unidad; y 3°, cuando el numerador es mayor que el denominador, el quebrado tiene un valor mayor que la unidad, esto es, representa un número fraccionario.

Definición.—*Se da el nombre de quebrado propio, ó fracción común á todo quebrado cuyo valor es menor que la unidad, lo cual se conoce en que el numerador es menor que su denominador.*

Definición.—*Se llama quebrado impropio ó fraccionario, á todo aquel cuyo valor es mayor que la unidad, lo cual se conoce en que su numerador es mayor que su denominador*

139.—Reducción de los enteros á fracción.—*Cuando se le quiera dar á un entero la forma de quebrado, se le pondrá por denominador la unidad:* $8=\frac{8}{1}$. En este caso se considera la unidad compuesta de una sola parte.

Cuando se quiere reducir un entero á fracción de determinado denominador, se multiplicará el entero por el denominador que se quiera que lleve la fracción, y al producto se le pondrá por denominador el propuesto. Por ejemplo, para reducir 7 enteros á quintos se multiplicará 7 por 5, y al producto 35 se le pondrá 5 por denominador: $7=\frac{35}{5}$

Esta regla se funda en que es un uso de la multiplicación reducir unidades de especie mayor á menor, y como la unidad se compone de 5 quintos, multiplicando 7 por 5, tendremos el número de quintos que tienen 7 unidades, y al producto 35 le pondremos 5 por denominador, para indicar el valor de las partes de la unidad.

Cuando se quieren reducir los enteros á la forma de quebrados que los *acompañan, se multiplicará el entero por el denominador del quebrado, al producto se le agrega el numerador, y á la suma se le da por denominador el del quebrado.*

Por ejemplo, si se quiere dar al número mixto $7+\frac{5}{9}$ la forma de quebrado, se multiplicará 7 por 9, al producto 63 le agregamos el numerador 5, dándole á la suma 68 por denominador 9.

$$7+\tfrac{5}{9}=\tfrac{68}{9}$$

DEMOSTRACIÓN.—Al multiplicar el entero por el denominador del quebrado, reducimos unidades de especie mayor á menor, y al agregar el numerador, sumamos cantidades homogéneas; esto es, partes de la unidad de la misma especie, cuyo valor expresamos poniendo por denominador el del quebrado.

140.—TRANSFORMACIÓN DE LOS FRACCIONARIOS EN ENTEROS Ó EN NÚMEROS MIXTOS.—*Cuando se quiere determinar los enteros que contiene un quebrado impropio, se divide el numerador por el denominador, y si hay resta se le pone por denominador el del quebrado.*

Sea por determinar los enteros que contiene el quebrado impropio $\frac{387}{12}$. Dividiremos 387 entre 12, y obtendremos 32 por cociente que serán los enteros contenidos, y á la resta 3 se le pondrá 12 por denominador, resultando que $\frac{387}{12}=32+\frac{3}{12}$

$$\begin{array}{r|l} 387 & 12 \\ \cline{2-2} 27 & 32 \\ 3 & \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN.—Al ejecutar esta regla, no hacemos más que reducir unidades de especie menor á mayor, doceavos á unidades, que es uno de los usos de la división, y siendo la resta partes de la unidad, cuya magnitud indica el denominador del quebrado impropio, se le deberá poner este número por denominador.

141.—VALOR RELATIVO ENTRE QUEBRADOS DE IGUALES DENOMINADORES Ó NUMERADORES.—Entre quebrados de iguales denominadores:

$$\tfrac{5}{12},\ \tfrac{3}{12},\ \tfrac{2}{12}\ \text{y}\ \tfrac{9}{12}$$

1° el mayor es $\frac{9}{12}$, que es el que tiene mayor numerador;

2° el menor es $\frac{2}{12}$, que es el que tiene menor numerador.

En razón de que, estando la unidad dividida en todos los quebrados en igual número de partes, la magnitud de éstas será la misma, y de que expresando el numerador el número de partes de que consta el quebrado el que tenga mayor numerador tendrá mayor valor, y el que lo tenga menor consta de menos partes.

Entre los quebrados de iguales numeradores:

$$\tfrac{6}{13},\ \tfrac{6}{9},\ \tfrac{6}{7}\ \text{y}\ \tfrac{6}{10}$$

el mayor es $\frac{6}{7}$, que es el que tiene menor denominador, y el menor es $\frac{6}{13}$ que es el que tiene mayor denominador.

Como todos los quebrados tienen iguales numeradores constan del mismo número de partes, y su valor dependerá de la magnitud de estas partes; pero como mientras menos sean las partes en que se divida la unidad, más grande será cada una de ellas, y recíprocamente; resulta que tendrá mayor valor el quebrado que tenga menor denominador y viceversa. De esto se infiere:

1° Que entre quebrados de iguales denominadores, el que tenga mayor numerador será el de mayor valor.

2° Que entre quebrados de iguales denominadores, el que tenga menor numerador será el menor.

3° Que entre quebrados que tienen iguales numeradores, es mayor el que tiene menor denominador; y

4° Que entre quebrados de iguales numeradores, será menor el que tenga mayor denominador.

142.—PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO DE LOS QUEBRADOS.—Las operaciones que se ejecutan con las fracciones y los números fraccionarios se fundan en los cuatro principios siguientes:

PRIMER PRINCIPIO.—*El valor de un quebrado se hace mayor tantas veces, como unidades tiene el número por el cual se multiplica su numerador.*

Si multiplicamos por 4 el numerador del quebrado $\frac{3}{15}$, se obtendrá el quebrado $\frac{12}{15}$ que es cuatro veces mayor que $\frac{3}{15}$.

DEMOSTRACIÓN.—Hay que demostrar dos cosas: 1ª que el valor del quebrado *se hace mayor*, y 2ª que se hace mayor *tantas veces* como unidades tiene el factor del numerador. 1° Expresando el numerador las partes de la unidad de que consta el quebrado, al multiplicar por un número entero el numerador aumentará este término, y por tanto *se hará mayor* el valor del quebrado; 2° como el producto de los enteros es tantas veces mayor que uno de los factores como unidades tiene el otro, el valor del nuevo quebrado será *tantas veces* mayor que el primitivo como unidades tiene el número por el cual se multiplique su numerador.

SEGUNDO PRINCIPIO.—*El valor de un quebrado se hace menor tantas veces como unidades tiene el número por el cual se multiplica su denominador.*

Si se multiplica por 2 el denominador del quebrado $\frac{3}{15}$, se obtendrá el quebrado $\frac{3}{30}$ dos veces menor que $\frac{3}{15}$

DEMOSTRACIÓN.—Hay que demostrar: 1º, que el valor del quebrado *se hace menor*, y 2º, que se hace *menor tantas veces* como unidades tiene el número por el cual se multiplica el denominador: 1.º Representando el denominador el número de partes en que está dividida la unidad, al multiplicar por un número este término, aumentará el número de partes de la unidad, y menor será cada una de ellas, por lo cual, el valor del quebrado *se hará menor:* 2º como el producto de los enteros es tantas veces mayor que uno de los factores como unidades tiene el otro factor, el valor del quebrado se hará *tantas veces* menor como unidades tenga el número por el cual se multiplique su denominador.

TERCER PRINCIPIO.—*El valor de un quebrado se hace menor tantas veces como unidades tiene el número por el cual se divide su numerador.*

Si dividimos por 3 el numerador del quebrado $\frac{6}{15}$, nos resultará $\frac{2}{15}$ tres veces menor que $\frac{6}{15}$.

DEMOSTRACIÓN.—El segundo quebrado $\frac{2}{15}$ es menor que $\frac{6}{15}$, porque entre quebrados de igual denominador, *es menor* el que tiene menor numerador. Además, siendo el numerador 2 el cociente de 6, dividido por 3, será el valor del numerador, y en consecuencia, el del segundo quebrado, *tantas veces menor* que el primero, como unidades tiene el número por el cual se dividió el numerador.

CUARTO PRINCIPIO.—*El valor de un quebrado se hace mayor tantas veces, como unidades tiene el número por el cual se divide su denominador.*

Si dividimos por 4 el denominador del quebrado $\frac{3}{24}$, resultará $\frac{3}{6}$ cuatro veces mayor que $\frac{3}{24}$.

DEMOSTRACIÓN.—Hay que demostrar: 1º, que el valor del quebrado *se hace mayor*, y 2º, que se hace *mayor tantas veces* como unidades tiene el número por el cual se divide su denominador. 1º Indicando este término las partes en que está dividida la unidad, cuando se divide por un número disminuirá, y resultando mayor el valor de cada una de las partes de la unidad, el valor del quebrado *se hará mayor;* 2º como el cociente es *tantas veces* menor que el dividendo como unidades tiene el divisor, el valor del quebrado se habrá hecho *tantas veces mayor* como unidades tiene el número por el cual se divide su denominador.

143.—Los cuatro principios que anteceden, pueden reasumirse en la tabla siguiente:

Si se multiplica Si se divide	el numerador..	se multiplicará se dividirá	el quebrado.
Si se multiplica Si se divide	el denominador.	se dividirá se multiplicará	el quebrado.

Por ejemplo:

$$\frac{6}{24}\times 3=\frac{18}{24}$$
$$\frac{6}{24}\times 3=\frac{6}{8}$$
$$\frac{6}{24}\div 3=\frac{2}{24}$$
$$\frac{6}{24}\div 3=\frac{6}{72}$$

Por esto se ve: 1º, que las operaciones fundamentales del cálculo de las fracciones son dos: multiplicar un quebrado por un entero, y dividir un quebrado por un entero; 2º, un quebrado se puede multiplicar por un entero multiplicando su numerador ó dividiendo su denominador; 3º, un quebrado se divide por un entero, dividiendo su numerador ó multiplicando su denominador; y 4º, la multiplicación del numerador, multiplica el quebrado y la división del numerador divide el quebrado; pero las mismas operaciones ejecutadas con el denominador, producen el resultado que daría la operación inversa hecha con el quebrado.

144.—EN QUÉ CASOS NO SE ALTERA EL VALOR DE UN QUEBRADO.—TEOREMA.—*El valor de un quebrado no se altera cuando se multiplican ó se dividen sus dos términos por un mismo número.*

DEMOSTRACIÓN.—1º Cuando se multiplica el numerador de un quebrado por un número, el valor del quebrado se hace tantas veces mayor como unidades tiene el número por el cual se multiplicó el numerador: pero cuando se multiplica el denominador, el valor del quebrado se hace el mismo número de veces menor; luego aumentando por una operación tanto cuanto disminuye por la otra, el valor del quebrado no sufrirá alteración.

2º Cuando se divide el numerador de un quebrado por un número su valor se hace menor tantas veces como unidades tiene el número por el cual se dividió su numerador; pero cuando se divide el denominador por el mismo número, el valor del quebrado se hace igual número de veces mayor; luego disminuyendo por la primera operación tanto cuanto aumenta por la segunda, el valor del quebrado no sufrirá alteración.

La primera parte de este teorema es el fundamento de la reducción de los quebrados á un común denominador, y la segunda parte sirve para abreviarlos.

145.—SIMPLIFICACIÓN DE LOS QUEBRADOS.—DEFINICIÓN.—*Simplificar ó abreviar un quebrado, es transformarlo en otro de igual valor cuyos términos sean más sencillos.*

Regla.—*Para simplificar un quebrado, se dividen el numerador y el denominador por un mismo número.*

Demostración.—1° El valor del quebrado simplificado será igual al del primitivo, porque el valor de un quebrado no se altera cuando se dividen sus dos términos por un mismo número; 2° los términos del quebrado simplificado serán más sencillos, porque el cociente de la división de enteros es menor que el dividendo.

El objeto de la abreviación ó simplificación de los quebrados es ejecutar las operaciones con más facilidad y menos probabilidad de equivocaciones.

Cuando se trata de simplificar un quebrado, lo que importa es determinar los divisores que son comunes al numerador y al denominador, y la simplificación puede ejecutarse de dos maneras: dividiendo el numerador y el denominador sucesivamente por los divisores parciales que les son comunes, ó por su máximo común divisor, para lo cual debe tenerse presente todo lo expuesto en los números del 119 al 131, y del 110 al 114.

Ejemplo.—Sea por simplificar el quebrado

$$\frac{5160}{6840}$$

buscando los números que dividen exactamente los dos términos del quebrado, observaremos que, terminando ambos en 0, serán divisibles por 10; sacándole décima parte se convertirá en $\frac{516}{684}$; en este quebrado, siendo pares las últimas cifras 6 y 4 de sus dos términos, se podrán dividir por dos; pero teniendo cuarta parte 16 y 84, los términos del quebrado serán divisibles por 4, lo cual lo transforma en $\frac{129}{171}$; los términos de este nuevo quebrado son divisibles por 3, porque la suma de las cifras del numerador $1+2+9$ da un número múltiplo de 3, las del denominador $1+7+1$ también dan un múltiplo de 3; por último, sacándole tercera parte, se obtiene el quebrado $\frac{43}{57}$ compuesto de números primos entre sí. En consecuencia el quebrado

	43
	129
	516
	5160
	6340
$\frac{1}{10}$	684
$\frac{1}{4}$	171
$\frac{1}{3}$	57

$$\frac{5160}{6840}=\frac{43}{57}$$

146.—Simplificación de los quebrados por medio de los divisores parciales de sus dos términos.—Cuando se quiere abreviar un quebrado dividiendo sucesivamente sus dos términos por divisores enteros comunes á ambos, se examina:

1° *Si la última cifra del numerador y la del denominador es 0 ó 5. Si ambas son 0, los términos del quebrado serán divisibles exactamente por 10* (119). *Si una es 0 y la otra 5, ó si ambas son 5, los términos del quebrado tendrán quinta parte* (120).

2° *Se observa, si tanto la última cifra del numerador como la del denominador es cero ó par; en este caso los términos del quebrado serán divisibles por* 2 (121). Cuando se ve que esta condición está satisfecha, *se examina si tanto las dos últimas cifras del numerador como las del denominador, tienen cuarta parte; en este caso, los dos términos del quebrado la tendrán* (122). Cuando se ve que esta última condición está satisfecha, *se examina si las tres últimas cifras del numerador y las del denominador tienen octava parte; en este caso los dos términos del quebrado la tendrán* (123).

3° Se observa si la suma de los guarismos que representan al numerador, y si la suma de los guarismos que representan al denominador, dan un número divisible por 9 ó por 3. *Cuando la suma de los guarismos de cada término del quebrado da un número múltiplo de 9, se podrán dividir por 9 y cuando la suma de los guarismos es un múltiplo de 3, los términos del quebrado serán divisibles por* 3 (125 y 124).

4° *Se observa si los dos términos del quebrado tienen mitad y tercera: en este caso se podrá simplificar dividiendo sus dos términos por* 6 (129).

Sean por abreviar los siguientes quebrados:

$$\frac{72}{96}=\frac{3}{4} \qquad \frac{945}{1080}=\frac{7}{8} \qquad \frac{216}{396}=\frac{6}{11} \qquad \frac{1800}{3240}=\frac{5}{9}$$

147.—Simplificación de los quebrados por el máximo común divisor.—*Para encontrar el máximo común divisor de los términos de un quebrado, se divide el denominador por el numerador; si la división sale exacta, el numerador será el máximo común divisor; en caso contrario, se divide el número que sirvió de divisor por la resta, y si la división no sale exacta, se continúa la operación dividiendo sucesivamente el último divisor por su resta hasta obtener una división exacta, siendo el máximo común divisor de los términos del quebrado el último divisor.*

La demostración de esta regla la hemos dado en el número 112.

Una vez encontrado el máximo común divisor, *el quebrado se simplifica dividiendo cada uno de sus términos por el máximo común divisor.*

Sea por determinar el máximo común divisor de los términos del quebrado $\frac{742}{1643}$.

La operación se facilita disponiéndola como sigue:

1643	742	159	106	53	00
	2	4	1	2	
31	14	3	2	1	

El máximo común divisor es 53, y para determinar los términos del quebrado reducido á su más simple expresión, se pone la unidad debajo del último cociente; en seguida se multiplica la unidad por este cociente y el producto se pone en la casilla de la izquierda, y se continúa multiplicando el guarismo inferior por el cociente que está sobre él, se agrega al producto el guarismo de la derecha, y se pone el resultado en la casilla de la izquierda. El fundamento de esta regla lo hemos dado en el número 114.

El quebrado $\frac{742}{1643}$ reducido á su más simple expresión, es igual á $\frac{14}{31}$.

Como ejercicio, búsquese el máximo común divisor de los quebrados siguientes:

$$\frac{171}{969}=\frac{3}{17} \quad \frac{627}{1425}=\frac{11}{25} \quad \frac{477}{1219}=\frac{9}{23} \quad \frac{799}{2961}=\frac{17}{63}$$

148.—Reducción de los quebrados á un común denominador.—Definición.—*Reducir los quebrados á un común denominador, es transformarlos en otros de igual valor, y cuyos denominadores son iguales entre sí.*

Esta operación puede ejecutarse de dos maneras:

1ª Regla.—*Para reducir los quebrados á un común denominador, se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los demás denominadores.*

Ejemplo.—Sea por reducir á un común denominador los quebrados

$$\frac{2}{3},\ \frac{1}{4} \text{ y } \frac{7}{8}$$

Multiplicaremos los términos del primer quebrado $\frac{2}{3}$ por 32, producto de los otros denominadores 4 y 8, y se convertirá en $\frac{64}{96}$. Los términos del segundo quebrado $\frac{1}{4}$, los multiplicaremos por 24 producto de los demás denominadores, y se transformará en $\frac{24}{96}$.

Por último, multiplicaremos los términos del tercer quebrado $\frac{7}{8}$ por 12, producto de los denominadores de los demás quebrados, y se convertirá en $\frac{84}{96}$. Así, los quebrados

$$\frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{7}{8}, \text{ se transforman en } \frac{64}{96},\ \frac{24}{96},\ \frac{84}{96}.$$

Demostración.—Hay dos cosas que demostrar: 1ª, *los quebrados que resultan son respectivamente iguaes en valor á los primeros,* porque el valor de un quebrado no se altera cuando se multiplican sus dos términos por un mismo número (144); 2ª *los quebrados tendrán el mismo denominador,* porque estando formado cada uno de los nuevos denominadores del producto de los mismos números, (los denominadores de los quebrados primitivos) serán iguales entre sí.

2ª Reglà.—*Para reducir los quebrados á un común denominador, se forma el menor múltiplo común á los denominadores, y en seguida se multiplican los dos términos de cada quebrado por el cociente que resulta de dividir el múltiplo común entre su denominador.*

Ejemplo.—Sea por reducir á un común denominador los quebrados

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6}$$

el menor múltiplo común á los denominadores 2, 3, 4 y 6, es 12. Los términos del primer quebrado $\frac{1}{2}$ los multiplicaremos por 6, cociente obtenido de dividir el común múltiplo 12 entre el denominador 2, y se transformará en $\frac{6}{12}$. Los términos del segundo quebrado $\frac{2}{3}$ los multiplicaremos por 4, cociente de $12 \div 3$, se transforma en $\frac{8}{12}$. Los términos del tercer quebrado $\frac{3}{4}$ los multiplicaremos por 3, cociente de $12 \div 4$, y se transforma en $\frac{9}{12}$. Por último, los términos del quebrado $\frac{5}{6}$ los multiplicaremos por 2, cociente de $12 \div 6$, y se transforma en $\frac{10}{12}$. Así, los quebrados

$$\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6} \text{ se han transformado en } \frac{6}{12}\ \frac{8}{12}\ \frac{9}{12}\ \frac{10}{12}$$

Demostración.—Los quebrados no han mudado de valor, porque el numerador y el denominador de cada quebrado, se han multiplicado por el mismo número (144), y resultan con el mismo denominador, porque cada denominador se ha multiplicado por el número escogido convenientemente para que se obtenga como producto el menor múltiplo común.

Para encontrar el menor múltiplo común á todos los denominadores, se aplica la regla dada (104). Esto es: *se comienza por excluir los denominadores que son factores de otros: los que quedan, que son los de mayor valor numérico, se descomponen en los factores primos que los forman, y el menor múltiplo común, es igual al producto de todos los diferentes factores primos de que están compuestos los denominadores, afectado cada uno del mayor de los exponentes.*

Así, en el ejemplo anterior, siendo 4 múltiplo de 2, y 6 de 3, se excluyen los denominadores 2 y 3, porque el múltiplo de 4 y de 6 también lo será de 2 y de 3. En seguida, descomponemos 4 y 6 en sus factores primos: $4=2^2$ y $6=2\times3$; y el menor múltiplo común será $2^2\times3=12$

Los usos de la reducción de los quebrados á un común denominador, son dos: 1° determinar entre varios quebrados, cuál tiene mayor ó menor valor (141); 2°, prepararlos para la adición y substracción. Es ventajoso reducir los quebrados á un común denominador por medio del menor múltiplo común; porque desde luego resultan simplificados, lo cual facilita la ejecución de las operaciones.

149.—Segundo modo de considerar los quebrados.—Teorema.—*El valor de un quebrado es igual al cociente que resulta de dividir su numerador por su denominador.*

Demostración.—Comenzaremos demostrando, que *el producto de un quebrado por un número igual á su denominador, es el numerador del quebrado.*

Hemos visto que para multiplicar un quebrado por un entero se multiplica su numerador (143). Por tanto

$$\frac{3}{8}\times 8=\frac{3\times 8}{8}$$

como dividiendo por 8 los dos términos del quebrado $\frac{3\times 8}{8}$ su valor no se altera (144), tendremos:

$$\frac{3\times 8}{8}=\frac{3}{1}=3$$

luego $$\frac{3}{8}\times 8=3$$

que es lo que se debía demostrar.

Ahora bien, como si el producto 3 de dos factores se divide por uno de ellos, 8, el cociente será el otro factor $\frac{3}{8}$: se infiere que $3\div 8=\frac{3}{8}$, esto es, que todo quebrado es igual al cociente que resulta de dividir su numerador por su denominador.

Este principio sirve de fundamento, 1° para extraer los enteros que contiene un quebrado impropio dividiendo el numerador por el denominador (140); 2°, para expresar el valor del cociente de una división de enteros cuando hay resta; y 3°, para valuar los quebrados.

150.—Determinación del cociente de una división de enteros cuando hay resta—Se ha visto que cuando queda resta en la división de enteros, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más la resta. Por ejemplo, si dividimos 29 entre 6, obtendremos 4 por cociente y 5 por resta, esto es:

$$29=(6\times 4)+5$$

podemos, pues, considerar al dividendo 29 compuesto de dos partes, (6×4) y 5, y el cociente de 29 dividido por 6, será igual á la suma de los cocientes de las partes que lo forman divididas por 6, pero como el cociente de $6\times 4\div 6$ es 4, y el de $5\div 6=\frac{5}{6}$ (149), resulta que

$$29\div 6=4+\frac{5}{6}$$

Luego en toda división de enteros en que hay resta, el cociente es un número mixto compuesto del cociente hallado como parte entera, más un quebrado que tiene la resta por numerador y el divisor por denominador. Se ve que la división de enteros conduce á la formación de los números quebrados, y que un quebrado es el cociente que resulta de dividir un número entero por otro mayor que él.

151.—Valuación de los quebrados.—Definición.—*Valuar un quebrado es determinar su valor en la especie de subdivisiones de la unidad á que pertenece ó convertirlo en número denominado.*

Así, sabiendo que el peso se dividía en 8 reales y el real en 8 tlacos, valuar el quebrado $\frac{15}{32}$ de peso, es averiguar á cuántos reales y tlacos equivale el quebrado $\frac{15}{32}$ de peso.

Regla.—*Para valuar un quebrado, se multiplica su numerador por el número de subdivisiones de la unidad á que se refiere el quebrado, y el producto se divide por el denominador.*

Cuando en la división queda resta se aplica esta regla al quebrado formado por la resta y el divisor, valuándolo en la siguiente subdivisión.

Ejemplo.—Supongamos que se quiere valuar $\frac{15}{32}$ de peso. Se multiplicará el numerador 15 por 8, número de reales que tenía un peso, y el producto 120 se divide por 32, obteniéndose el cociente 3 reales y la resta 24; en seguida el quebrado $\frac{24}{32}$ de real, lo valuamos en tlacos multiplicando su numerador por 8, número de tlacos que tenía un real, y el producto 192 lo dividimos por 32, obteniendo el cociente 6 tlacos.

```
 15   | 32
  8   |_______________
----  | 3 rs. 6 tlacos
 120
  24
   8
----
 192
  00
```

$$\frac{15}{32}\overset{\$}{}=3 \text{ rs. } 6 \text{ tls.}$$

Demostración.—La regla consta de dos partes: 1ª, se multiplica el numerador por el número de subdivisiones de la unidad á que se refiere el quebrado, con el objeto de reducirlo á unidades de especie menor, lo cual es un uso de la multiplicación, bastando multiplicar el numerador para multiplicar el quebrado (143). Así, pues,

$$\frac{15^{\$}}{32}=\frac{15\times 8^{rs.}}{32}=\frac{120^{rs.}}{32}$$

2ª, se divide el producto por el denominador, porque para extraerle los enteros á un quebrado impropio, se debe dividir el numerador por el denominador [104]. Esto es:

$$\frac{120}{32}=3 \text{ rs.}+\frac{24}{32}$$

Se ve, pues, que la valuación de los quebrados es una operación compuesta de su reducción á especie menor, y de la extracción de enteros de los quebrados impropios.

ADICION DE LAS FRACCIONES.

152.—Casos de la adición de las fracciones.—Se presentan en esta operación tres casos: 1º, *sumar un quebrado con un entero*: 2º, *sumar quebrados con quebrados*: y 3º, *sumar números mixtos.*

En los dos últimos casos puede suceder que los quebrados tengan iguales ó diferentes denominadores.

153.—Regla para sumar las fracciones.—1.er caso.—*Para sumar un quebrado con un entero, se multiplica el entero por el denominador del quebrado; se le agrega al producto el numerador y se pone al resultado por denominador el del quebrado.*

Ejemplo.—Sea por sumar $\frac{3}{4}+7$ multiplicaremos 7 por 4=28, agregamos 3, y al resultado 31 le ponemos 4 por denominador, obteniéndose

$$\frac{3}{4}+7=\frac{31}{4}$$

Como el orden de los sumandos no altera el valor de la suma la misma regla se practicará para sumar $7+\frac{3}{4}$.

Demostración.—El fundamento de esta operación [139], es que cuando se multiplica el entero por el denominador, se reducen unidades de especie mayor á menor; cuando se agrega el numerador, se suman partes de la unidad de igual valor, y cuando al resultado se le pone por

denominador el del quebrado: se indica el valor de las partes del quebrado.

2º caso.—*Para sumar quebrados con quebrados, cuando los denominadores son iguales, se suman los numeradores, y á la suma se le pone por denominador, el denominador común. Cuando los quebrados tienen denominadores desiguales, se reducen préviamente á un común denominador; en seguida se suman los numeradores, y á la suma se le da por denominador el denominador común. Cuando el resultado es un quebrado impropio se le extraen los enteros.*

Ejemplo.—Sean por sumar $\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{5}{6}$. Se reducen los quebrados á un común denominador por la regla dada. [148]:

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{5}{6}=\frac{144}{192}+\frac{168}{192}+\frac{160}{192}=\frac{472}{192}=2+\frac{88}{192}=2+\frac{11}{24}$$

se suman los numeradores 144, 168 y 160, y poniendo á la suma el denominador común, se obtiene el quebrado impropio $\frac{472}{192}$ al cual se le extraen los enteros dividiendo el numerador por el denominador, siendo el cociente $2+\frac{88}{192}$: abreviando el quebrado, cuyos términos son divisibles por 8, se tiene por resultado $2+\frac{11}{24}$.

La misma operación determinando el menor múltiplo de los denominadores, es como sigue:

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{5}{6}=\frac{18}{24}+\frac{21}{24}+\frac{20}{24}=\frac{59}{24}=2+\frac{11}{24}$$

El menor múltiplo de 4, 6 y 8, es 24, este número dividido por el primer denominador 4, da como cociente 6, y por este número se multiplican los dos términos del primer quebrado: en seguida, dividiendo 24 entre 8, se obtiene 3, y por este número se multiplican los dos términos del quebrado $\frac{7}{8}$: por último, como $24\div6=4$, multiplicaremos los dos términos del tercer quebrado $\frac{5}{6}$ por 4. Reducidos los quebrados á un común denominador, se suman los numeradores y se obtiene el quebrado $\frac{59}{24}$ que es impropio$=2+\frac{11}{24}$.

Demostración.—Se reducen los quebrados á un común denominador cuando no lo tienen, porque para que las partes de la unidad puedan sumarse, es necesario que sean de la misma magnitud, lo cual se consigue, sin alterar su valor, haciendo que los quebrados tengan el mismo denominador. Se suman los numeradores, porque son los términos que expresan las partes de la unidad de que se compone cada quebrado: y á la suma de éstos, se le pone el denominador común para expresar el valor de las partes de la unidad que se han sumado. La extracción de los enteros cuando la suma es un quebrado impropio, está fundada en que es un uso de la división reducir unidades de especie menor á mayor.

3.er CASO.—*Cuando hay que sumar números mixtos, la operación puede hacerse de dos maneras: incorporando los enteros á los quebrados y sumando en seguida los quebrados impropios: ó sumando primero los quebrados y en seguida los enteros, teniendo cuidado de agregar á éstos las unidades que resulten de la adición de los quebrados.*

La suma es igual á la de los enteros, más el quebrado que haya resultado.

EJEMPLO.—Sea por sumar $3+\frac{7}{8}+4+\frac{4}{6}+8+\frac{2}{3}$. Empleando el primer método, la operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$3+\tfrac{7}{8}+4+\tfrac{4}{6}+8+\tfrac{2}{3}=\tfrac{31}{8}+\tfrac{28}{6}+\tfrac{26}{3}=\tfrac{93}{24}+\tfrac{112}{24}+\tfrac{208}{24}=\tfrac{413}{24}=17+\tfrac{5}{24}$$

Empleando el segundo método, la operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$\begin{array}{l} 3+\frac{7}{8}=3+\frac{21}{24} \\ 4+\frac{4}{6}=4+\frac{16}{24} \\ 8+\frac{2}{3}=8+\frac{16}{24} \\ \hline 17+\frac{5}{24} \qquad \frac{53}{24} \end{array}$$

Después de puestos los números mixtos unos debajo de los otros, se reducen á un común denominador los quebrados, se suman éstos, y se obtiene el quebrado impropio $\frac{53}{24}=2+\frac{5}{24}$, por lo que se suma 2 con los enteros 3, 4 y 8, obteniéndose el resultado $17+\frac{5}{24}$.

DEMOSTRACIÓN.—En el primer método, los quebrados impropios tienen el mismo valor que los números mixtos que se quieren sumar, y como si con cantidades iguales se ejecuta la misma operación, los resultados serán iguales, se infiere que la suma de los quebrados impropios es igual á la de los números mixtos.

Practicando la regla del segundo método hemos reunido en la suma los quebrados y los enteros que son las partes de los números mixtos, luego habremos reunido en la suma los números mixtos.

154.—La suma de los quebrados es mayor que uno y que varios sumandos, supuesto que expresa el valor de todos los sumandos juntos.

SUBSTRACCION DE LAS FRACCIONES.

155.—CASOS DE LA SUBSTRACCIÓN DE LAS FRACCIONES.—Se presentan en esta operación tres casos: 1º, *restar un quebrado de un entero*: 2º *restar un quebrado de otro, y* 3º, *restar números mixtos.*

En los dos últimos casos puede suceder que los quebrados tengan ó no iguales denominadores.

156.—REGLA PARA RESTAR LAS FRACCIONES.—PRIMER CASO.—*Para restar un quebrado de un entero, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, se resta el numerador, y á la diferencia se le pone por denominador el del quebrado.*

EJEMPLO.—Sea por restar $\frac{7}{8}$ de 5.

$$5-\tfrac{7}{8}=\tfrac{33}{8}=4+\tfrac{1}{8}.$$

multiplicaremos 5 por 8, 40; menos 7, 33, á cuyo resultado le ponemos 8 por denominador. Al quebrado $\frac{33}{8}$ se le sacan los enteros dividiendo el numerador por el denominador, y se obtiene por resultado $4+\frac{1}{8}$.

DEMOSTRACIÓN.—Cuando se multiplica el entero por el denominador del quebrado se reducen unidades de especie mayor á menor: cuando se resta el numerador, se encuentra la diferencia entre las partes de la unidad de que consta el quebrado y las que contiene el entero, y al resultado se le da por denominador el del quebrado para expresar el valor de las partes de la unidad de la diferencia hallada.

SEGUNDO CASO.—*Para restar un quebrado de otro, cuando los denominadores son iguales, se restan los numeradores y á la resta se le pone por denominador el de los quebrados: cuando éstos tienen denominadores desiguales, se reducen préviamente á un común denominador* (148), *en seguida se restan los numeradores y á la resta se le pone por denominador el común.*

Sea por restar de $\frac{8}{9}$ el quebrado $\frac{3}{4}$. La operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$\tfrac{8}{9}-\tfrac{3}{4}=\tfrac{32}{36}-\tfrac{27}{36}=\tfrac{5}{36}$$

DEMOSTRACIÓN.—Se reducen los quebrados á un común denominador, cuando no lo tienen, porque esta operación no altera su valor, y porque es necesario, que las partes de la unidad que representan los quebrados, sean homogéneas para que se puedan restar. Se restan los numeradores porque ellos expresan las partes de la unidad de que consta cada quebrado, y á la resta se le pone el denominador común para indicar el valor de las partes de la unidad de la diferencia encontrada.

TERCER CASO.—*Cuando hay que restar números mixtos, la operación puede ejecutarse de dos maneras: reduciendo los enteros á la forma de quebrados que los acompañan, y restando los quebrados impropios que resultan conforme á la regla del segundo caso; ó restando primero los quebrados por su regla y en seguida los enteros.*

Cuando la operación se ejecuta por el último método y sucede que el quebrado del substraendo es mayor que el del minuendo, se le agrega al *quebrado del minuendo, después de haberlo reducido á un común denominador, una unidad transformada en quebrado, esto es, se agrega al numerador el denominador; de esta suma se resta el numerador del quebrado del substraendo, y se pone á la diferencia el denominador común, teniendo cuidado al continuar la operación de agregar á la memoria una unidad á la parte entera del substraendo, á fin de no alterar el valor de la resta.*

EJEMPLO.—Sea por restar $7+\frac{8}{9}$ de $12+\frac{2}{3}$

Empleando el primer método, la operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$(12+\tfrac{2}{3})-(7+\tfrac{8}{9})=\tfrac{38}{3}-\tfrac{71}{9}=\tfrac{114}{9}-\tfrac{71}{9}=\tfrac{43}{9}=4+\tfrac{7}{9}$$

Se reducen los enteros á la forma de quebrados, y la operación se transforma en restar de $\frac{38}{3}$, $\frac{71}{9}$. Para reducir estos quebrados á un común denominador, siendo 9 múltiplo de 3, multiplicaremos los dos términos del primero por 3, y reducidos ambos á novenos, se restan los numeradores y se obtiene por diferencia $\frac{43}{9}=4+\frac{7}{9}$ como resultado final.

Empleando el segundo método, la operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$\begin{array}{lll} 12+\frac{2}{3}\ldots\ldots & \frac{6}{9}\ldots\ldots & \frac{15}{9} \\ 7+\frac{8}{9}\ldots\ldots & \frac{8}{9}\ldots\ldots & \frac{8}{9} \\ \hline 4+\frac{7}{9} & & \frac{7}{9} \end{array}$$

Después de puestos los números fraccionarios uno debajo de otro, se reducen los quebrados á un común denominador multiplicando los dos términos de $\frac{2}{3}$ por 3. Como resulta que $\frac{6}{9}$ quebrado del minuendo, es menor que $\frac{8}{9}$, se agrega al primero una unidad reducida á novenos, $\frac{9}{9}$: lo cual se consigue agregando el denominador al numerador, lo que da $\frac{15}{9}$. Restando de este número $\frac{8}{9}$, se obtiene $\frac{7}{9}$ que se pone debajo del substraendo; y supuesto que al quebrado del minuendo le agregamos una unidad; para no alterar el valor de la diferencia (50), agregaremos una unidad á la parte entera del substraendo, y diremos: 7 y 1, 8, de 8 á 12, la diferencia es 4; obteniéndose $4+\frac{7}{9}$ como resultado final.

DEMOSTRACIÓN.—Adoptando el primer método; los quebrados impropios tienen el mismo valor que los números mixtos que se quieren restar, y como si con cantidades iguales, se ejecuta la misma operación, los resultados serán iguales, se infiere que la resta de los quebrados impropios es igual á la de los números mixtos.

Empleando el segundo método, la diferencia encontrada es la suma de las diferencias de las partes del minuendo y del substraendo; luego esta será la diferencia buscada. Cuando se agrega una unidad reducida á quebrado, al quebrado del minuendo, para poder restar el del substraendo, no se altera el valor del resultado, porque agregándose una unidad á la parte entera del substraendo [50], hay perfecta compensación.

157.—Observaremos que en las fracciones, lo mismo que en los enteros, el resultado de la substracción es menor que el minuendo; pero podrá ser mayor, igual ó menor que el substraendo, supuesto que expresa lo que le falta á este término para ser igual al minuendo.

MULTIPLICACION DE LAS FRACCIONES.

158.—CASOS DE LA MULTIPLICACIÓN DE LAS FRACCIONES.—En esta operación se presentan tres casos: 1º *Multiplicar un quebrado por un entero.* 2º *Multiplicar un quebrado por otro quebrado.* 3º *Multiplicar números mixtos.*

159.—REGLAS PARA MULTIPLICAR LAS FRACCIONES.—PRIMER CASO.—*Para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador por el entero, y al producto se le da por denominador el del quebrado. Cuando hay que multiplicar un entero por un quebrado, se seguirá la misma regla,* supuesto que el orden de los factores no altera el valor del producto.

Ejemplo:

$$\tfrac{3}{4}\times 7=\tfrac{21}{4}=5+\tfrac{1}{4} \qquad\qquad 9\times\tfrac{4}{5}=\tfrac{36}{5}=7+\tfrac{1}{5}$$

El fundamento de esta regla lo hemos dado en el número 142, primer principio, y se comprende que expresando el numerador las partes de la unidad de que consta el quebrado, mientras mayor se haga el numerador, mayor será el valor del quebrado.

SEGUNDO CASO.—*Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador.*

Ejemplo:

$$\tfrac{4}{5}\times\tfrac{3}{7}=\tfrac{12}{35}$$

DEMOSTRACIÓN.—Nos valdremos de este ejemplo para explicar el fundamento de la regla, pero los raciocinios que hagamos podrán aplicarse á cualquier caso. Si quisiéramos multiplicar $\frac{4}{5}$ por 3, sería necesario multiplicar el numerador por 3 y poner al producto por denominador 5, esto es:

$$\frac{4}{5}\times 3=\frac{4\times 3}{5}$$

pero no se quiere multiplicar $\frac{4}{5}$ por 3,

sino $$\tfrac{4}{5}\times\tfrac{3}{7}$$

siendo el multiplicador verdadero siete veces menor que 3, supuesto que un séptimo es 7 veces menor que la unidad, para obtener el producto verdadero será necesario hacer 7 veces menor el resultado $\frac{4\times 3}{5}$; y como un quebrado se hace menor tantas veces como unidades tiene el número por el cual se multiplica su denominador (142, 2° principio), el producto verdadero será $\frac{4\times 3}{5\times 7}$, esto es:

$$\tfrac{4}{5}\times\tfrac{3}{7}=\frac{4\times 3}{5\times 7}$$

El modo de formación de este producto hace ver que para multiplicar los quebrados, se deben multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador.

Debe observarse que la multiplicación de un quebrado por otro, es una operación compuesta de dos: 1ª, multiplicar un quebrado por un entero, el quebrado del multiplicando por el numerador del multiplicador; 2ª, dividir un quebrado por un entero, el quebrado del producto anterior dividido por el denominador del multiplicador.

Tercer caso.—*Para multiplicar números mixtos por mixtos, la operación puede hacerse de dos modos: 1°, reduciendo los enteros á la forma de los quebrados que les acompañan, y multiplicando los quebrados impropios que resulten: 2°, haciendo la multiplicación por partes, multiplicando sucesivamente el entero y el quebrado del multiplicando, por el entero y por el quebrado del multiplicador.*

Ejemplo.—Sea por multiplicar $3+\frac{7}{8}$ por $6+\frac{2}{3}$.

Empleando el primer método, la operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$(3+\tfrac{7}{8})\times(6+\tfrac{2}{3})=\tfrac{31}{8}\times\tfrac{20}{3}=\tfrac{620}{24}=25+\tfrac{20}{24}=25+\tfrac{5}{6}$$

Demostración.—Los quebrados impropios que han resultado de la incorporación de los quebrados con los enteros que los acompañan, tienen el mismo valor que los números mixtos que se quieren multiplicar, y como si con cantidades iguales se ejecuta la misma operación, los re-

sultados serán iguales, se infiere que el producto obtenido de los quebrados impropios es igual al producto de los números mixtos.

Empleando el segundo método, la operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$\begin{array}{rrcll}
 & & 3 & +\ \tfrac{7}{8} & \\
 & & 6 & +\ \tfrac{2}{3} & \\
\hline
6\times 3 & = & 18 & & \\
6\times\tfrac{7}{8}=\tfrac{42}{8} & = & 5 & +\ \tfrac{2}{8} & \tfrac{6}{24} \\
\tfrac{2}{3}\times 3=\tfrac{6}{3} & = & 2 & & \\
\tfrac{2}{3}\times\tfrac{7}{8}=\tfrac{14}{24} & = & 0 & +\ \tfrac{14}{24} & \tfrac{14}{24} \\
\hline
 & & 25 & +\ \tfrac{5}{6} & \tfrac{20}{24}
\end{array}$$

Se multiplican por la parte entera 6 del multiplicador, primero el entero y en seguida el quebrado $\frac{7}{8}$ del multiplicando; después se multiplican por el quebrado $\frac{2}{3}$ del multiplicador el entero y el quebrado del multiplicando. Por último, se suman los productos parciales y se obtiene el producto total $25+\frac{5}{6}$. Para sumar los quebrados $\frac{2}{8}$ y $\frac{14}{24}$ se han reducido á la derecha á un común denominador, y se ha abreviado su suma $\frac{20}{24}$.

Demostración.—Cuando con todas las partes que constituyen una cantidad se ejecuta una operación, el resultado es el mismo que si se ejecutara la operación con toda la cantidad; practicando la regla se han multiplicado los enteros y los quebrados del multiplicando por los enteros y por los quebrados del multiplicador, luego se habrá obtenido el producto de los números mixtos.

160.—Teorema.—*El producto de la multiplicación de dos quebrados propios, es menor que cualquiera de los dos factores.* Sabemos que cuando el multiplicador es la unidad, el producto es igual al multiplicando (64); y que cuando disminuye uno de los factores, el producto disminuye igualmente (62); luego cuando el multiplicador es quebrado, esto es, cuando tiene un valor menor que la unidad, el producto será menor que el multiplicando, y como puede invertirse el orden de los factores sin cambiar el valor del producto, éste será también menor que el multiplicador.

Esto comprueba que el producto de dos cantidades no siempre es mayor que alguno de los factores, pues la palabra multiplicar, que en el lenguaje común envuelve la idea de aumento, en matemáticas se aplica á la operación que tiene por objeto *producir una cantidad que tenga con un factor la misma relación que tiene el otro factor con la unidad.*

Cuando se *multiplica un entero por un quebrado cuyo numerador es la unidad*, en la práctica la operación se simplifica dividiendo el entero por el denominador del quebrado. Si queremos, por ejemplo, obtener el producto de

$$648\times\frac{1}{4}=162$$

bastará sacarle cuarta parte al entero 648. La razón de esto es, que el producto del entero por el numerador del quebrado en este caso es la misma cantidad, y que para sacar los enteros al quebrado que resulta hay que dividir esta cantidad por el denominador del quebrado.

DIVISION DE LAS FRACCIONES.

161.—Casos de la división de las fracciones.—Pueden presentarse en la práctica de esta operación, cuatro casos: 1.° *Dividir un quebrado por un entero.* 2.° *Dividir un entero por un quebrado.* 3.° *Dividir un quebrado por otro.* 4.° *Dividir números mixtos.*

162.—Reglas para dividir las fracciones.— Primer caso.—*Para dividir un quebrado por un entero, se multiplicará el denominador por el entero y se dejará al resultado por numerador el del quebrado.*

Ejemplo:

$$\frac{5}{6}\div 9=\frac{5}{54}$$

El fundamento de esta regla es el dado en el número 142, 2° principio, y se comprende que, expresando el denominador el número de partes en que está dividida la unidad, cuando este número aumenta, menor es cada una de las partes, por lo cual, ejecutando la regla, se habrá dividido el valor del quebrado.

Segundo caso.—*Para dividir un entero por un quebrado, se considerarán invertidos los términos del quebrado divisor, y en seguida se multiplicará el entero por el quebrado invertido.*

Ejemplo:

$$7\div\frac{4}{8}=\frac{56}{4}=14.$$

Demostración.—Si se quisiera dividir el entero 7 por el numerador 4 del quebrado, supuesto que todo quebrado es igual al cociente del numerador dividido por el denominador (149), tendríamos que

$$7\div 4=\frac{7}{4}$$

pero como el divisor no es 4 sino $\frac{4}{8}$, número 8 veces menor, bastará hacer el resultado 8 veces mayor para obtener el cociente que se busca (77); y como un quebrado se hace tantas veces mayor como unidades tiene el número por el cual se multiplica su numerador (142—1er. principio); multiplicando el numerador de $\frac{7}{4}$ por 8, obtendremos el resultado verdadero $\frac{7\times 8}{4}$; que como se ve se ha formado conforme á la regla dada.

$$7\div\frac{4}{8}=\frac{7\times 8}{4}$$

Tercer caso.—*Para dividir un quebrado por otro, se consideran* ***invertidos*** *los términos del quebrado divisor, y en seguida se multiplica el* ***dividendo*** *por el quebrado invertido.*

Ejemplo: $$\frac{5}{6}\div\frac{4}{8}=\frac{5}{6}\times\frac{8}{4}=\frac{5\times 8}{6\times 4}=\frac{40}{24}=1+\frac{2}{3}$$

Demostración.—Si quisiéramos dividir el quebrado $\frac{5}{6}$ por 4, numerador del divisor, encontraríamos el resultado multiplicando el denominador 6 por 4 (142, 2° principio), esto es:

$$\frac{5}{6}\div 4=\frac{5}{6\times 4}$$

pero como no se quiere dividir $\frac{5}{6}$ entre 4, sino

$$\frac{5}{6}\div\frac{4}{8}$$

siendo el divisor verdadero $\frac{4}{8}$, 8 veces menor que el divisor empleado, 4 unidades, y recordando (77) que cuando se divide el divisor por un número el cociente resulta multiplicado por el mismo número, se infiere que el cociente de $\frac{5}{6}\div\frac{4}{8}$ será 8 veces mayor que el cociente encontrado $\frac{5}{6\times 4}$; por lo que multiplicando por 8 el numerador (142- 1er. principio) del quebrado $\frac{5}{6\times 4}$, tendremos el cociente verdadero, esto es,

$$\frac{5}{6}\div\frac{4}{8}=\frac{5\times 8}{6\times 4}$$

luego para obtener el cociente de un quebrado por otro, debe multiplicarse el dividendo por el quebrado del divisor, invertidos sus términos.

Debe observarse que la division de un quebrado por otro, es una operación compuesta de dos: 1ª, dividir un quebrado por un entero, el dividendo por el numerador del divisor; y 2ª, multiplicar un quebrado por un entero, el quebrado que resulta de la primera operación, multiplicado por el denominador del divisor.

Cuarto caso.—*Para dividir un número mixto por otro mixto, se reducirán los enteros á la forma de los quebrados que les acompañan, y en seguida se dividirán los quebrados impropios que resulten.* Ejemplo:

$$\left(8+\frac{3}{4}\right)\div\left(5+\frac{2}{7}\right)=\frac{35}{4}\div\frac{37}{7}=\frac{35\times 7}{4\times 37}=\frac{245}{148}=1+\frac{97}{148}$$

Demostración.—Como al reducir los enteros á la forma de quebrados no han cambiado de valor, el resultado de la división será el cociente verdadero, supuesto que si con cantidades iguales se ejecutan las mismas operaciones, los resultados serán iguales.

163.—Teorema.—*Siempre que el divisor sea un quebrado propio, el cociente será mayor que el dividendo.* Sabemos que cuando el divisor es la unidad el cociente es el dividendo (81), y que cuando el divisor disminuye, el cociente aumenta: luego siempre que el divisor sea menor que la unidad el cociente será mayor que el dividendo.

* (164.)—Observaciones sobre el cálculo de las fracciones.—El valor de los quebrados depende del valor de sus dos términos, debiendo observarse que hay la misma relación entre el valor del numerador y el del denominador, que entre el del quebrado y el de la unidad.

Los quebrados pueden considerarse de dos modos: 1°, como un número de partes de determinada magnitud; y en este caso el numerador indica el número de las partes y el denominador la magnitud de ellas: 2°, como el cociente del numerador dividido por el denominador.

Son operaciones fundamentales del cálculo de los quebrados la multiplicación y la división de un quebrado por un entero. Efectuadas estas operaciones con el numerador, producen la multiplicación y la división del quebrado, y efectuadas con el denominador, producen el resultado de la operación recíproca.

Las operaciones auxiliares para el cálculo de las fracciones son: la reducción de enteros á quebrados, la de fraccionarios á números mixtos, la valuación de un quebrado, su simplificación y la reducción á un común denominador.

Respecto de las operaciones de los quebrados, debe observarse: que para efectuar la adición y substracción, es preciso que los quebrados estén reducidos á un común denominador, no siéndolo para la multiplicación y división; la adición y substracción se ejecutan sumando y restando sólo los numeradores; la multiplicación, multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador: y la división, invirtiendo los

términos del quebrado divisor y multiplicándolos en seguida. En los números fraccionarios, la adición, substracción y multiplicación pueden hacerse incorporando los enteros con los quebrados, ó por partes. La división, por comodidad, solo se hace incorporando préviamente los enteros con los quebrados.

El resultado de la suma es mayor que uno y qué varios sumandos: el de la resta, es menor que el minuendo: el de la multiplicación, es menor que el multiplicando cuando el multiplicador es quebrado propio, y menor que cualquiera factor cuando ambos lo son: el cociente de la división es mayor que el dividendo cuando el divisor es quebrado propio.

CALCULO DE LAS FRACCIONES DECIMALES.

SISTEMA DE NUMERACIÓN, PRINCIPIOS Y OPERACIONES FUNDAMENTALES.

165.—Base de las fracciones decimales.—Hemos visto que los valores menores que la unidad se expresan y representan por medio de los quebrados, y ahora haremos notar que en las fracciones comunes la unidad puede dividirse en cualquier número de partes: la hora, la arroba, el peso, lo mismo que toda unidad puede dividirse en 2, en 3, en 4, en 80, en 475 ó en cualquier número de partes, constando la fracción de un número dado de esas partes, siendo de rigor que el denominador esté expreso y que se escriba debajo del numerador.

En el capítulo siguiente veremos que en los números *denominados* la unidad se divide y se subdivide convencionalmente en un número fijo de partes, pero distinto en cada unidad y aún en las subdivisiones de la misma unidad. Por ejemplo, 6 varas, 2 pies, 4 pulgadas, es número *denominado* en el que los pies son fracciones de la vara, y las pulgadas, fracciones del pie; pero convencionalmente se ha fijado que la vara se divida en 3 pies y el pie en 12 pulgadas, y en lugar de escribir $\frac{2}{3}$ de vara y $\frac{4}{12}$ de pie, se escriben los denominados como números enteros, estando tácito el denominador de cada subdivisión.

Entre los quebrados y los denominados se notan las siguientes diferencias. Los quebrados pueden ser abstractos y los denominados siempre son concretos. En los quebrados el denominador puede ser cualquier número, está expreso y se aplica á toda clase de unidades; mientras que en los denominados para cada especie de unidades el denominador es constante y siempre está sobrentendido.

Ahora bien, para expresar y representar las cantidades menores que la unidad y los números mixtos, y con el objeto de facilitar la ejecución de las operaciones, se han hecho diversas convenciones en armonía con las del sistema de numeración de los enteros, que constituyen el sistema de las *fracciones decimales*, en las que la unidad se divide forzosa y sucesivamente en 10, en 100, en 1000, etc., partes, esto es, el denominador es una potencia de 10, está sobrentendido y se aplica este sistema á toda clase de unidades. Por ejemplo, en lugar de $\frac{1}{2}$ hora se toma su igual $\frac{5}{10}$ que se escribe 0'5 de hora y se lee 5 décimos de hora; en lugar de $\frac{1}{4}$\$ se toma $\frac{25}{100}$ que se escribe 0'25\$ y se lee 25 centésimos de peso.

Del mismo modo que una centena se divide en 10 decenas, y una decena se divide en 10 unidades, en el sistema decimal, para expresar las partes de la unidad, ésta se considera dividida en 10 partes que se llaman *décimas;* cada *décima* se considera subdividida en 10 partes que se llaman *centésimas,* porque la unidad resulta compuesta de 100 centésimas: cada *centésima,* se subdivide en 10 partes llamadas *milésimas,* porque la unidad resulta compuesta de 1000 milésimas, y continuando la subdivisión sucesivamente de 10 en 10, se obtienen las diezmilésimas; las cienmilésimas, las millonésimas, las diezmillonésimas, etc. Por esto se vé que la nomenclatura de las fracciones decimales se deriva de la de los enteros, y como la de éstos, tiene la doble ventaja de exigir el empleo de pocas palabras y de dar idea estas palabras del valor de las subdivisiones.

Así como en la numeración escrita de los enteros, las decenas puestas á la derecha de las centenas representan un orden de unidades 10 veces menor que las centenas; y así como las unidades escritas á la derecha de las decenas son 10 veces menores que éstas, del mismo modo se ha convenido en escribir las *décimas,* después de una coma, á la derecha de las unidades, las *centésimas* á la derecha de las *décimas,* las *milésimas* á la derecha de las *centésimas,* y así sucesivamente, dando á las cifras en las decimales lo mismo que en los enteros, un valor relativo establecido bajo la base de que un guarismo cualquiera representa partes de la unidad 10 veces menores que las que indica la cifra que está á su izquierda.

166.—Definición.—*Se llama decimal á todo quebrado cuyo denominador es tácito é igual á la unidad seguida de tantos ceros como subdivisiones tenga la cantidad.*

167.—Sistema de numeración.—Este, como se ha indicado, tiene en las decimales exactamente la misma base que en los enteros, siendo indispensable distinguir la parte entera en una cantidad de la parte fraccionaria. Para esto se coloca entre los enteros y las decimales una

coma, y cuando no hay enteros se representan por un cero, poniendo en seguida la coma, y por último, las decimales. Para evitar las confusiones á que da lugar el empleo de la coma puesta en la parte de abajo con el signo ortográfico y con la que se usa para dividir los períodos de los millares, es preferible colocar la coma invertida en la parte superior para distinguir los enteros de las decimales, ó poner un punto; pero siempre en la parte alta de los números. Por ejemplo, 5 décimas se escribe: 0'5 y se lee 0 unidades 5 décimas.

4 unidades 25 centésimas, se escribe: 4'25

Además, es preciso en la parte decimal reemplazar con ceros los órdenes de fracciones de unidad de que carece á veces entre las partes decimales, y otras entre los enteros y las decimales. En el primer caso, las decimales se escriben como los enteros; por ejemplo, trecientos cinco milésimas se escribe 0'305 milésimas; 48 enteros 320006 millonésimas, se escribe 48'320006. En el segundo caso se ponen después de la coma y antes de los guarismos que representan la cantidad decimal, tantos ceros como son necesarios para darle á la decimal el valor que le corresponde, lo cual depende del denominador sobrentendido; por ejemplo, si se quiere escribir 0 enteros, 145 diezmilésimas, por el orden de la subdivisión de la decimal, se infiere que el denominador ha de ser 10000, y como 145 se escribe con tres guarismos y 10000 tiene cuatro ceros, se ve que será necesario poner un cero después de la coma y antes de 145, así: 0'0145, lo que es igual á $\frac{145}{10000}$, verdadero valor de la decimal que se quería representar.

Para escribir con facilidad la parte decimal, los alumnos deben fijarse en que

para	representar	*décimas*	debe	haber	después	de la coma	1	cifra.
"	"	*centésimas*	"	"	"	"	2	cifras.
"	"	*milésimas*	"	"	"	"	3	"
"	"	*diezmilésimas*	"	"	"	"	4	"
"	"	*cienmilésimas*	"	"	"	"	5	"
"	"	*millonésimas*	"	"	"	"	6	"
"	"	*diezmillonésimas*	"	"	"	"	7	"

etc. De lo expuesto se deduce la siguiente

Regla para escribir las cantidades decimales.—*Se escribirá primero la parte entera, representándola por un cero cuando no la haya; en seguida se pone la coma; y antes de escribir la parte decimal, se examina con cuántos guarismos debe escribirse como entero y de cuántos ceros debe estar seguida la unidad en el denominador tácito; después de la coma se ponen los ceros que sea necesario para que la parte decimal conste de tantos guaris-*

mos como ceros deban seguir á la unidad en el denominador, y por último, se escribe la parte decimal como si fuera entero.

Por ejemplo:

0 unidades 44 diezmilésimas, se escribe...........	0‘0044
28 unidades 2 millonésimas, se escribe...........•	28‘000002
3 unidades 3304 diezmillonésimas, se escribe........	3‘0003304

Regla para leer las cantidades decimales.—*Se lee primero la parte entera diciendo unidades, ó la especie de éstas al llegar á la coma, y en seguida se lee la parte decimal como si fuera entero, teniendo cuidado de nombrar al fin el orden de la última subdivisión.*

Por ejemplo:

0‘305	se lee....	0 unidades 305 milésimas.
\$ 28‘0030098	„	28 ps. 30098 diezmillonésimas.
Quints. 4‘032044	„	4 quintales 32044 millonésimas.

La última cantidad, por ejemplo, se compone de 4 quintales más 3 centésimas, más 2 milésimas, más 4 cienmilésimas, más 4 millonésimas, y es igual á 4 quintales 32044 millonésimas de quintal.

168.—Principios fundamentales del cálculo de las decimales.—Siendo las decimales fracciones cuyo denominador sobrentendido es la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal, el valor de ésta dependerá, como en los quebrados, de la relación que exista entre el numerador y el denominador, y las variaciones que tenga alguno de estos términos en las decimales, dará el mismo resultado que en los quebrados.

1º—*Cuando en una decimal se corre la coma hacia la derecha, su valor se hace diez veces mayor por cada lugar que se cambia la coma, esto es, se multiplica la decimal por* 10, 100, 1000, *etc.* Sea la decimal 3‘125, corriendo la coma dos lugares á la derecha, se transformará en 312‘5 cantidad que será $10 \times 10 = 100$ veces mayor que la primera.

Demostración.—Cuando la coma se ha corrido dos lugares á la derecha, constando la parte decimal de dos cifras menos, el denominador tendrá también dos ceros menos, lo cual equivale á dividirlo por 100, y como el valor de un quebrado se hace tantas veces mayor como unidades tiene el número por el cual se divide su denominador, se infiere que la decimal se habrá hecho 100 veces mayor.

2º—*Cuando en una decimal se corre la coma hacia la izquierda, su valor se hace diez veces menor por cada lugar que se corre la coma, esto es, se divide la decimal por* 10, 100, 1000, etc.

Sea 3845‘72, corriendo la coma hacia la izquierda, dos lugares, la cantidad se transforma en 38‘4572, que será 100 veces menor que la primera.

Demostración.—La cantidad 38‘4572 es 100 veces menor que 3845‘72 porque $3845‘72 = \frac{384572}{100}$ y $38‘4572 = \frac{384572}{10000}$, y como un quebrado se hace tantas veces menor como unidades tiene el número por el que se multiplica su denominador, (142—2º) la segunda expresión 38‘4572 será 100 veces menor que la primera 3845‘72.

3º—*El valor de una decimal no se altera cuando se le agregan ó quitan ceros á la derecha.*

Por ejemplo: 0‘375=0‘375000 y 0‘04400=0‘044.

Demostración.—Cuando se agregan ceros á la derecha de una decimal, no se hace más que reducir unidades de especie mayor á menor, lo cual no cambia su valor. En el ejemplo propuesto hemos reducido milésimas á millonésimas, siendo lo mismo 375 milésimas que 375000 millonésimas, supuesto que 1 milésima es igual á 1000 millonésimas.

Cuando se quitan los ceros de la derecha, la operación equivale á reducir unidades de especie menor á mayor, y lo mismo es 4400 cienmilésimas que 44 milésimas.

Puede demostrarse este principio de otra manera. Cuando se agregan ceros, equivale á multiplicar los dos términos de un quebrado por un mismo número, y cuando se suprimen, equivale á dividirlos por un mismo número, operaciones que, como se sabe, no alteran el valor de un quebrado.

4º—*Cuando en una cantidad decimal que no contiene enteros, se ponen ceros entre la coma y la parte decimal, el valor de ésta disminuye; y cuando se suprimen ceros entre la coma y la parte decimal, su valor aumenta diez veces por cada cero suprimido.*

Por ejemplo: $0‘32 \div 100 = 0‘0032$ y $0‘0005 \times 1000 = 0‘5$.

Demostración.—Cuando se ponen, por ejemplo, dos ceros entre la coma y la parte decimal, el denominador tácito de ésta se multiplica por 100, luego el valor de la decimal se hará 100 veces menor.

Cuando se suprimen, por ejemplo, tres ceros entre la coma y la parte decimal, el denominador tácito de ésta se hace 1000 veces menor; y como cuando se divide el denominador, aumenta el valor del quebrado, el de la decimal, se habrá hecho mil veces mayor.

El primer principio sirve para multiplicar una decimal, y el segundo para dividirla por la unidad seguida de ceros: el tercero sirve para reducirlas á un común denominador ó para abreviarlas: el cuarto sirve para dividir ó multiplicar una decimal que *no contiene enteros* por la unidad seguida de ceros.

169.—Simplificación y reducción de las decimales á un común denominador.—*Cuando una decimal termina en ceros se puede simplificar suprimiendo éstos*, pues equivale á dividir los dos términos de un quebrado por un mismo número.

Para reducir las decimales á un común denominador, se hace que todas tengan igual número de cifras decimales, agregando tantos ceros á la derecha como sean necesarios á la que tenga menos.

La simplificación de las decimales facilita la ejecución de las operaciones y evita errores en los cálculos. La reducción á un común denominador es una operación preparatoria para la adición, la substracción y la división, y es útil para conocer entre varias cantidades decimales cuál es la mayor ó la menor.

Dependiendo el valor de una decimal de la relación que existe entre el valor de su numerador y el de su denominador, es claro que no pueden compararse las decimales fácilmente sino cuando tienen el mismo denominador, esto es, cuando expresan partes de la misma magnitud.

Por ejemplo, 0'5 y 0'375 no pueden compararse fácilmente sino cuando ambas cantidades expresan milésimas.

0'500 y 0'375,

resultando que 0'5 es mayor que 0'375.

170.—Reducción de los quebrados á decimales.—*Para reducir un quebrado á decimal, se divide el numerador por el denominador, agregando al numerador tantos ceros como cifras se quiera que tenga la decimal.*

Sea por reducir $\frac{7}{8}$ á decimal: la operación se ejecuta como sigue:

Dividiendo 7 entre 8 se obtiene 0 unidades. En seguida se agrega al numerador un cero y se obtiene en el cociente 8 décimas, y una resta 6, á la cual se le agrega un cero y se obtiene el cociente 7 centésimas y la resta 4, á la que se le agrega un cero para obtener el cociente exacto 5 milésimas.

70	8
60	0'875
40	
0	

$\frac{7}{8}$=0'875

Demostración.—La de esta regla es la misma que hemos dado para la valuación de un quebrado (151), pues lo que se ha hecho es valuarlo en décimas, centésimas, milésimas, etc.

La transformación de un quebrado en decimal, rara vez conduce á un resultado exacto, y por esto vamos á examinar: 1°, cómo podrá obtenerse el grado de aproximación que se necesite en los cálculos; 2°, en qué casos un quebrado podrá transformarse exactamente en decimal; y 3°, cuándo esta transformación no podrá efectuarse exactamente, y conduce á la formación de decimales llamadas *periódicas.*

171.—Aproximación de las decimales.—En todas las necesidades de la vida se observa que al estimar la medida ó el valor de las cosas, se establece un límite que viene á fijar el grado de la aproximación. Cuando se determina el valor de una cuenta de comercio, se lleva la aproximación hasta los centavos de peso, pero no á los milésimos; por ejemplo: la edad de una persona se valúa por lo regular sólo en años y casi nunca se lleva la aproximación hasta las horas, etc. Así, pues, cuando se haya obtenido un resultado expresado por la decimal 0'4736, se ve que este es mayor que 0'4 y menor que 0'5, y si por la naturaleza de la cuestión de que procedió este resultado, bastase llevar en cuenta sólo las décimas de la unidad, la decimal 0,4736 podría reemplazarse por los valores más sencillos, 0'4 ó 0'5, supuesto que cualquiera de ellos no difiere del verdadero 0'1. En casos semejantes al propuesto, debe examinarse el valor de la cifra siguiente á las décimas; y como aquí ésta es 7 centésimas, el resultado 0'4 es 0'07 menor que el verdadero, y 0'5 es 0'03 mayor; por lo que tomando este último, la aproximación será mayor. Cuando se quiere llevar la aproximación hasta las centésimas, los valores más sencillos que 0'4736 serán 0'47 ó 0'48, pero como las milésimas son 3 y no llegan á 5, deberá preferirse el valor 0'47, que se acerca más al verdadero.

En general, *cuando en una cantidad decimal se suprimen las últimas cifras, si la primera de las cifras suprimidas es 5 ó un guarismo mayor que 5, se debe agregar una unidad á la última cifra conservada; permaneciendo ésta sin variación cuando la suprimida que le sigue no llega á 5.*

Cuando se quiere convertir un quebrado en decimal con determinado grado de aproximación, se divide el numerador por el denominador, y se va agregando un cero á cada resta hasta obtener en el cociente una decimal del orden á que se quiere llevar la aproximación.

Por ejemplo: se quiere convertir en decimal el quebrado $\frac{35}{64}$ aproximando el resultado hasta las milésimas.

Dividiremos 35 por 64, agregando sucesivamente un cero, hasta llegar á obtener el valor 0'546 que no diferirá un milésimo del verdadero. Siempre es conveniente llevar la aproximación á la cifra siguiente para saber si se deja el guarismo de las milésimas tal como salió, ó si se le aumenta una unidad. Siendo en el caso

350	64
300	0'546
440	
56	

actual las diezmilésimas 8, resulta que llevando la aproximación hasta las milésimas, el quebrado:

$$\tfrac{35}{64}=0{,}547$$

Como el valor verdadero del quebrado $\frac{35}{64}$ es 0,546875 se ve que está comprendido entre 0'546 y 0'547, luego tomando 0'547 se satisfará la condición de no separarse un milésimo del valor verdadero.

El límite á que se lleva la aproximación depende de la naturaleza de la cuestión, y de la magnitud de la unidad: pero es raro que en los usos comunes la aproximación por decimales se lleve á más de 7 cifras.

Cuando se trata, por ejemplo, de apreciar el precio de una substancia de poco valor, como la paja, la aproximación puede ser mucho menor que cuando se pesa oro. Tratándose de la misma substancia, la aproximación debe extenderse á medida que la unidad escogida para valuarla es mayor. Por ejemplo, si pesando una substancia en quintales se consideran las milésimas como aproximación suficiente, cuando se le pese en onzas, será inútil llevar la aproximación más allá de las décimas, supuesto que un quintal tiene 1,600 onzas.

172.—Casos en que un quebrado puede convertirse exactamente en decimal.—*Un quebrado podrá transformarse exactamente en decimal, siempre que después de haber descompuesto en sus factores primos sus dos términos, y de haber suprimido los factores comunes, el denominador no quede formado más que de los factores primos de diez, 2 y 5, elevados á cualquiera potencia, ó de uno de ellos solamente.*

Por ejemplo, $\frac{7}{8}=\frac{7}{2^3}$ podrá convertirse exactamente en decimal en virtud de que su denominador no está formado más que del número 2, (factor de 10) elevado á la tercera potencia. La razón de esto es que para convertirlo en decimal, se multiplicará su numerador por $10=2\times5$, por $100=2^2\times5^2$, por $1{,}000=2^3\times5^3$, etc., y se dividirá por el denominador, quedando en nuestro ejemplo expresada la división por

$$\frac{7\times2^3\times5^3}{2^3}$$

suprimiendo el factor común al dividendo y al divisor, 2^3, el cociente será un número entero que tendrá por valor los factores del numerador diferentes de los del denominador: $7\times5^3=875$. En efecto, $\frac{7}{8}=0{,}875$.

El quebrado $\frac{21}{60}=\frac{3\times7}{2^2\times3\times5}$, cuyo denominador contiene además de las potencias de 2 y de 5 el factor primo 3, podrá convertirse exactamente en decimal, porque este factor 3 es común al numerador y al denominador. En este caso la división estará expresada por

$$\frac{3\times7\times2^2\times5^2}{2^2\times3\times5}$$

y el cociente entero será $7\times5=35$. En efecto, $\frac{21}{60}=0{,}35$.

Demostración.—Como para convertir un quebrado en decimal se multiplica el numerador por una potencia de 10 y el producto se divide por el denominador, el dividendo será el producto de los factores primos del numerador multiplicados por $2^n\times5^n$, (representando n la potencia correspondiente de 10,) y como sabemos que la división de dos números será exacta siempre que el dividendo sea el producto del divisor por un número entero, se infiere que cuando el denominador esté formado de factores primos comunes al numerador y de los factores de 10, que son 2 y 5, elevados á cualquiera potencia, el resultado de la división tendrá que ser exacto.

Cuando la conversión de un quebrado en decimal conduce á un resultado exacto, el número de cifras decimales es igual al mayor exponente de que 2 ó 5 queda afectado en el denominador, después de haber suprimido los factores comunes á los dos términos.

Si, por ejemplo, tenemos que convertir el quebrado $\frac{37}{40}$ en decimal, siendo el denominador $40=2^3\times5$, es necesario, para obtener un cociente exacto, multiplicar el numerador tantas veces por $10=2\times5$ cuantas sean indispensables para formar el mayor factor 2^3, esto es, 3 veces, y como por otra parte, cada multiplicación por 10 produce una cifra en el cociente, éste constará del número de guarismos indicados por el mayor exponente de uno de los factores. En efecto $\frac{37}{40}=0{,}925$, consta de tres cifras decimales.

173.—Casos en que un quebrado no puede transformarse exactamente en decimal, siendo los resultados fracciones periódicas.—*Cuando después de haber descompuesto en sus factores primos los dos términos de un quebrado, y de haber suprimido los factores comunes, resulta que el denominador queda formado de factores que no son 2 ni 5, ó que además de estos números elevados á cualquier potencia contiene otro factor, el quebrado no podrá convertirse exactamente en decimal.*

Por ejemplo, $\frac{4}{21}=\frac{2^2}{3\times7}$ quebrado cuyo denominador, no está formado de los factores 2 ni 5, no podrá convertirse exactamente en decimal.

El quebrado $\frac{12}{35}=\frac{2^2\times3}{5\times7}$, cuyo denominador, además del factor 5, contiene el número primo 7 que no forma parte del numerador, tampoco podrá convertirse exactamente en decimal.

Demostración.—Hemos visto que para transformar un quebrado en decimal se multiplica el numerador por $2^n \times 5^n$ y se divide entre el denominador. El dividendo estará formado de sus factores primos multiplicados por $2^n \times 5^n$, siendo necesario que este dividendo sea múltiplo del divisor para que la división pueda ser exacta; luego cuando el divisor esté formado por factores primos que no constituyen al dividendo el cociente no será exacto y el quebrado no podrá transformarse sino aproximadamente en decimal.

En estos dos casos, la transformación de un quebrado en decimal, no puede conducir á un resultado exacto; pero como las restas tienen que ser menores que el divisor, forzosamente se vuelve á encontrar en el transcurso de la división una de las restas anteriores, y en seguida se reproduce en el cociente la serie de números obtenidos anteriormente.

Por ejemplo, para convertir $\frac{3}{11}$ en decimal, se divide 3 entre 11, agregando sucesivamente un cero á cada resta, y se ve que en el cociente se obtiene el período 27 repetido constantemente, sin que sea posible llegar á obtener un resultado exacto.

30	11
80	0'2727
30	
80	
3	

Sea como segundo ejemplo, convertir el quebrado $\frac{7}{24}$ en decimal. Dividiendo 7 entre 24, y agregando sucesivamente ceros á la resta, se obtiene primero la parte 0'291, y en seguida se sigue repitiendo indefinidamente el período 6.

70	24
220	0'29166
40	
160	
160	
16	

A esta clase de resultados se les *llama fracciones periódicas*, esto es, *á las cantidades decimales compuestas de una serie de guarismos periódicamente iguales.*

Se distinguen dos clases de fracciones periódicas: las simples y las mixtas. *Fracciones periódicas simples son aquellas en las que el período comienza inmediatamente después de la coma; y mixtas, aquellas en las que el período que se repite no comienza sino algunos guarismos después de la coma.*

Las fracciones periódicas se indican escribiendo el período dentro de un paréntesis

Por ejemplo $\frac{3}{11}$=0'(27) $\frac{7}{24}$=0'291(6) $\frac{4}{11}$=0'(36) $\frac{11}{14}$=0'7(857142)

En las fracciones periódicas debe observarse:

1° *Que el número de guarismos de que el período está compuesto, es menor que el número de unidades del denominador*, supuesto que debiendo ser la resta menor que el divisor, no podrá exceder el número de restas diferentes del de unidades del denominador, y que una vez encontrada una resta igual á otra, se repite el período. 2° Si después de haber suprimido los factores comunes, el denominador no tiene 2 ni 5 por factores, el período comienza inmediatamente después de la coma. 3° Cuando después de simplificado el quebrado, el denominador, además de otros factores que no forman parte del numerador, queda formado de las potencias de 2 ó de 5, el período estará precedido de tantas cifras como unidades tenga el mayor exponente de que esté afectado 2 ó 5. Cuando se tiene, por ejemplo, $\frac{7}{12}=\frac{7}{2^2\times 3}$, estando formado el denominador de dos factores, para hacer desaparecer 2^2, será preciso multiplicar el numerador dos veces por $10=2\times 5$ para tener 2^2 en el dividendo; y como cada vez que se multiplica la resta por 10, se obtiene un guarismo decimal en el cociente, obtendremos primero dos cifras decimales, y en seguida quedará una resta para dividirse por 3, que será la que produzca el período. Esto explica por qué éste estará precedido de dos guarismos en el ejemplo propuesto.

$\frac{7}{12}$=0'58 (3).

Ejemplos.—$\frac{42}{50}=\frac{2\times 3\times 7}{2\times 5^2}=\frac{3\times 7}{5^2}$ podrá convertirse exactamente en decimal con dos cifras.

$\frac{63}{120}=\frac{3^2\times 7}{2^3\times 3\times 5}=\frac{3\times 7}{2^3\times 5}$ podrá convertirse exactamente en decimal con 3 cifras.

$\frac{40}{42}=\frac{2^3\times 5}{2\times 3\times 7}=\frac{2^2\times 5}{3\times 7}$ dará una fracción periódica simple.

$\frac{55}{120}=\frac{5\times 11}{2^3\times 3\times 5}=\frac{11}{2^3\times 3}$ dará una fracción periódica mixta con 3 decimales antes del período.

174.—Reducción de las decimales á quebrados.—En la práctica de esta operación, distinguiremos cuatro casos: 1°, *transformar en quebrado una decimal cuyo valor es exacto*; 2°, *cuando sólo es aproximado su valor*; 3°, *transformar en quebrado una fracción periódica simple*; y 4°, *una fracción periódica mixta.*

Primer caso.—*Para transformar en quebrado una decimal cuyo valor es exacto, se pone á la decimal, tomada como entero, por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras haya después de la coma, y en seguida se abrevia el quebrado.*

Por ejemplo: 0'375=$\frac{375}{1000}=\frac{3}{8}$.

Demostración.—Al ejecutar esta regla, no se hace más que expresar el denominador tácito de la decimal, y al simplificar el quebrado no se altera su valor.

Segundo caso.—*Para transformar en quebrado una decimal cuyo valor sólo es aproximado, se ejecuta la regla anterior llevando la aproximación hasta el grado que lo exija la cuestión.* (171.)

Por ejemplo: se tiene la decimal 0'4615737, y se quiere convertir en quebrado, llevando la aproximación hasta las milésimas. La decimal será:

$$0'462=\frac{462}{1000}=\frac{231}{500}$$

Se comprende que en este caso, el valor del quebrado diferirá del verdadero, una cantidad que depende del grado de aproximación.

Tercer caso.—*Para convertir una fracción decimal periódica simple en quebrado, se considerará el período como entero y se le pondrá por denominador tantos nueves como cifras tenga el período, simplificando el quebrado cuando sea posible.*

Por ejemplo: $0'(27)=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}$ $\quad 0'(6)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

Para comprender el fundamento de esta regla, observaremos la marcha y resultados de la operación cuando hay que convertir en decimal un quebrado que tiene la unidad por numerador y uno ó varios nueves por denominador. Si convertimos $\frac{1}{9}$ en decimal, será necesario agregar un cero al nnmerador y dividir 10 por 9, y como $10=9+1$, ejecutando la división se obtendrá 1 por resta, y continuando la aproximación se repetirá la división de 10 por 9, lo cual reproducirá el cociente y la resta obtenida antes, por lo que se ve que $\frac{1}{9}$ es igual á la fracción periódica (0'1). Si convertimos $\frac{1}{99}$ en decimal, será necesario agregar dos ceros al numerador para obtener 0'01 de cociente y 1 por resta, supuesto que $100=99+1$; continuando la aproximación, tendremos que agregar dos ceros, y repitiéndose la división de 100 por 99, volverá á reproducirse el cociente y la resta obtenida antes, por lo que se ve que $\frac{1}{99}$ es igual á una fracción periódica representada por 0'(01). Si convertimos $\frac{1}{999}$ y $\frac{1}{9999}$ en decimal, obtendremos las fracciones periódicas 0'(001) y 0'(0001), luego:

$$\frac{1}{9}=0'(1) \quad \frac{1}{99}=0'(01) \quad \frac{1}{999}=0'(001) \quad \frac{1}{9999}=0'(0001) \text{ etc.}$$

Generalizando este raciocino, fundado en que la unidad seguida de ceros es igual al mismo número de nueves más 1, comprenderemos que toda fracción periódica igual á una décima, á una centésima, etc., procede de un quebrado cuyo numerador es la unidad y el denominador consta de tantos nueves como cifras decimales tenga el período.

Esto supuesto, cualquiera fracción periódica simple compuesta de una cifra es igual al período tomado como número entero multiplicado por la fracción periódica $0'(1)=\frac{1}{9}$. Por ejemplo, $0'(3)=3\times0'(1)=3\times\frac{1}{9}=\frac{3}{9}$.

En consecuencia, el valor exacto de una fracción periódica que consta de un solo guarismo, es el de un quebrado que tiene este guarismo por numerador y 9 por denominador.

Si tenemos un período compuesto de dos guarismos como 0'(27), tendremos:

$$0'(27)=0'(01)\times27=\frac{1}{99}\times27=\frac{27}{99}.$$

Cuando consta de tres como 0'(273), tendremos:

$$0'(273)=0'(001)\times273=\frac{1}{999}\times273=\frac{273}{999}$$

Luego en general, el valor exacto de una fracción periódica simple, es el de un quebrado cuyo numerador es el periodo tomado como número entero, y su denominador consta de tantos nueves como guarismos tiene el período.

En el caso de que se deba convertir en quebrado una decimal que *conste de unidades seguidas de una fracción periódica simple,* se incorporarán las unidades al quebrado á que es igual la fracción periódica simple. Por ejemplo, $3'(27)=3+\frac{27}{99}=\frac{324}{99}$

Cuarto caso.—*Para convertir una fracción decimal periódica mixta en quebrado, se le pone á la parte que precede al período por denominador, la unidad seguida de tantos ceros como guarismos tiene esta parte: á los guarismos que forman el período se les pone por denominador tantos nueves como cifras tiene la parte periódica, seguidos los nueves de tantos ceros como guarismos tiene la parte no periódica; se suman los quebrados, y el resultado abreviado será el valor de la fracción periódica mixta.*

Por ejemplo: se trata de convertir en quebrado la decimal 0'725(27)

$$0'725(27)=\frac{725}{1000}+\frac{27}{99000}=\frac{725\times99+27}{99000}=\frac{71802}{99000}=\frac{3989}{5500}$$

2º ejemplo: $\quad 0'29(54)=\frac{29}{100}+\frac{54}{9900}=\frac{29\times99+54}{9900}=\frac{2925}{9900}=\frac{13}{44}$

Demostración.—Se sabe que cuando en una decimal se corre la coma hacia la derecha, su valor se hace 10 veces mayor por cada lugar que se cambia la coma. En consecuencia, si en la fracción periódica mixta 0'726(27) corremos la coma hasta la izquierda del período haremos su valor 1000 veces mayor, y para restituirle el que le corresponde, tendremos que dividirlo por 1000, esto es:

$$0'725(27)=\frac{725'(27)}{1000}=\frac{725}{1000}+\frac{0'(27)}{1000}$$

Así pues, el valor de la fracción periódica mixta consta de dos partes: 1ª, $\frac{725}{1000}$; y 2ª, el período 0'(27) dividido por 1000, y como el período es igual á $\frac{27}{99}$ dividido por 1000 será $\frac{27}{99000}$. Luego en definitiva tendremos:

$$0'725(27)=\frac{725}{1000}+\frac{27}{99000}=\frac{71802}{99000}$$

que es lo que prescribe la regla.

En el caso de que se tenga que convertir en quebrado una decimal *compuesta de unidades seguidas de una fracción periódica mixta*, se incorporarán las unidades con el quebrado á que es igual la fracción periódica mixta.

Por ejemplo, $3'725(27)=3+\frac{725}{1000}+\frac{27}{99000}$

$3'725(27)=3+\frac{71802}{99000}=\frac{368802}{99000}$

ADICION DE LAS DECIMALES.

175.—Regla.—*Para sumar las decimales, se escriben las cantidades unas debajo de otras, lo mismo que en los enteros, teniendo cuidado de que la coma forme una columna vertical y de que se correspondan los órdenes de unidades y los de las subdivisiones de igual valor. Para evitar equivocaciones, se reducen las decimales, algunas veces, á un común denominador, lo que se consigue agregando ceros á la derecha de las decimales que tienen menos cifras. En seguida se comienza á sumar por las decimales de la derecha, ejecutando la operación como la de los enteros, teniendo cuidado de colocar la coma en el resultado en la columna de los sumandos.*

Sean por sumar las siguientes cantidades:

	Kilogramos.		Varas.
	37'0945		325'305
	8'2350		45'620
	46'2200		377'730
	7'3556		78'446
	28'9600		262'220
	72'3609		16'800
kil.	200'2260	varas	1106'121

Siendo el sistema de numeración de las decimales el mismo que el de los enteros, la demostración de esta regla y todas las observaciones correspondientes á su ejecución, prueba, casos y usos, son las mismas que se hicieron al tratar de los enteros. En cuanto á la reducción á un común denominador, como se sabe, es una operación que no altera el valor de las decimales, teniendo por objeto sumar fácilmente unas con otras las subdivisiones de la misma especie.

SUBSTRACCION DE LAS DECIMALES.

176.—Regla.—*Para restar las cantidades decimales se escribe el substraendo debajo del minuendo, teniendo cuidado de que la coma se corresponda en una columna lo mismo que los órdenes de unidades y los de las subdivisiones de igual valor; se reducen las decimales á un común denominador agregando ceros á la derecha á la que tenga menos cifras, y se ejecuta la operación como la de enteros, poniendo la coma en el resultado en la columna correspondiente.*

Sean por restar las siguientes cantidades:

$	345'037200	fs.	796'60420
	—89'380465		—534'22008
pesos	255'656735	fanegas	262'38412

Como el valor de una decimal no se altera cuando se reduce á un común denominador, la resta encontrada será la verdadera; por lo demás, la demostración de la regla, la prueba de la operación, sus casos y usos, todo es idéntico á lo explicado en la substracción de los números enteros.

MULTIPLICACION DE LAS DECIMALES.

177.—Regla.—*Para multiplicar las decimales se hace abstracción de la coma, se ejecuta la operación lo mismo que si las cantidades fueran números enteros, y en el producto se separan, contando de derecha á izquierda, tantas cifras decimales como hay en ambos factores juntos.*

Ejemplos:

Cargas.	Varas.	Metros.
3·075	0·000456	0·044
á $ 48·75	á $ 0·023	á $0·008
15375	1368	$ 0·000352
215 5	912	
24600	$ 0·000010488	
12300		
$149·90625		

Se ve en el segundo y tercer ejemplo, que cuando en el producto hay menos cifras significativas que decimales en ambos factores, es necesario antes de poner la coma en el producto, agregar á la izquierda de la cantidad tantos ceros cuantos sean necesarios para igualar el número de decimales que hay en ambos factores juntos.

Demostración.—Cuando se considera el multiplicando como número entero, prescindiendo de la coma que separa las decimales, se hace este factor cierto número de veces mayor (en el primer ejemplo ha sido 1000 veces), y en consecuencia, el producto resultará 1000 veces mayor. Cuando prescindimos de la coma en el multiplicador, lo hacemos 100 veces mayor, luego para obtener el producto verdadero, deberemos hacerlo tantas veces menor como se había hecho mayor, lo cual se consigue corriendo la coma tantos lugares á la izquierda como cifras decimales haya en ambos factores juntos.

La prueba de esta operación, las abreviaciones correspondientes á los casos y sus usos, son los mismos que se han explicado en la multiplicación de enteros.

En cuanto al valor relativo del producto, éste tiene, respecto de un factor, la misma relación que existe entre el otro factor y la unidad, Por esto, cuando un factor consta de enteros y de decimales, el producto es, mayor que el otro; pero cuando solo consta de decimales, esto es. cuando un factor es menor que la unidad, el producto es menor que el otro factor.

DIVISION DE LAS DECIMALES.

178.—Regla.—*Para dividir las cantidades decimales, se hará que tanto el dividendo como el divisor, tengan igual número de cifras decimales, agregando los ceros necesarios á la derecha del término que tenga menos. En seguida, haciendo abstracción de la coma, se dividirán como si fueran*

enteros, pudiendo suceder que el cociente tenga ó no parte entera. Cuando se puede dividir el dividendo por el divisor, el cociente constará de enteros, y para determinar la parte decimal, después de poner la coma en el cociente, á la resta se le agrega un cero, y dividiendo por el divisor, se determinan las décimas del cociente; agregando sucesivamente un cero á cada resta y dividiendo por el divisor, se determinan las centésimas, las milésimas, etc., del cociente, llevando la aproximación hasta donde sea necesario. Cuando después de igualadas las cifras decimales y de prescindir de la coma, el dividendo sea menor que el divisor, se pondrá un cero en el cociente, y la coma, para indicar que no hay enteros; comenzándose desde luego la aproximación por decimales, agregando sucesivamente un cero al dividendo y luego á cada resta para determinar en el cociente las decimales correspondientes hasta llegar al límite que se desee.

Cuando el término que tenga menos cifras decimales sea fracción periódica, en lugar de ceros, se le agregarán las cifras significativas correspondientes del período que sean necesarias para igualar las del otro término.

Ejemplos.

		0·0345	0·87	0·5(27)	0·3247
345·220	44·035	0·034500	0,8700	0·5272	0·3247
36 9750	7·839	84000	0·039	20257	1·623
1 74700		5700		7752	
425950				12587	
29635				2846	

En el primer ejemplo, constando el dividendo de dos cifras decimales y el divisor de tres, agregamos al dividendo un cero y se obtuvo el cociente entero 7, y la parte decimal 839 milésimas.

En el segundo ejemplo, el divisor tiene menos cifras decimales, por lo que le agregamos dos ceros. Dividiendo 345 entre 8700 se obtiene 0 unidades. Dividiendo en seguida 3450 entre 8700, se obtiene 0 décimas. Dividiendo en seguida 34500 entre 8700 se obtiene 3 centésimas, habiendo podido abreviarse la división suprimiendo dos ceros á la derecha del dividendo y otros tantos en el divisor. Por último, se han obtenido 9 milésimas, habiéndonos conformado en ambos ejemplos con la aproximación hasta este grado. En el tercer ejemplo en lugar de ceros hemos agregado al dividendo las cifras del período 27.

Demostración.—Cuando se agregan ceros á la derecha de la decimal de uno de los términos de la división, no se altera su valor. En seguida, al prescindir de la coma en el dividendo, considerándolo como entero, este término, lo mismo que el cociente, se hace cierto número de veces mayor; pero como al prescindir de la coma en el divisor el cociente se hace el mismo número de veces menor, habrá perfecta compensación y el cociente será el verdadero.

La prueba de esta operación, las abreviaciones correspondientes á sus casos y los usos, son los mismos que los de la división de enteros.

El valor del cociente es menor que el dividendo cuando el divisor consta de enteros; pero si el divisor consta solo de decimales, el cociente es mayor que el dividendo.

* (179).—Observaciones sobre el cálculo de las decimales.—La sencillez de las operaciones ejecutadas con las decimales, depende de tener el denominador tácito, y de haber adoptado las mismas convenciones del sistema de numeración de los enteros.

El valor de una decimal depende de la relación que hay entre el valor expresado por sus cifras y el de su denominador sobrentendido, el cual depende á su vez del número de cifras decimales que hay después de la coma.

Por esto el valor de una decimal se altera cuando se cambia de lugar la coma; si se corre á la derecha, se multiplica, y si se corre á la izquierda, se divide por 10 y por las potencias de 10.

El valor de un número decimal no se altera cuando se suprimen ó agregan ceros á la derecha. Como operaciones fundamentales, tenemos, además de la multiplicación y división de las decimales por 10 y sus potencias, su abreviación, su reducción á un común denominador y las transformaciones de un quebrado en decimal, y de un número decimal en quebrado.

Cuando se reduce un quebrado á decimal, si después de haber descompuesto sus términos en sus factores primos, y después de haber suprimido los que sean comunes, *el denominador* solo consta de las potencias de 2 y de 5, el quebrado podrá transformarse exactamente en decimal; si no consta de 2 ni de 5, no podrá transformarse exactamente, y el resultado será una fracción periódica simple; y cuando el denominador consta de 2 ó de 5 y de otros factores primos, el resultado será una fracción periódica mixta. El número de cifras de la decimal depende especialmente de los exponentes de los factores en el denominador.

En la conversión de las decimales á quebrados, se les da por denominador la unidad seguida de ceros cuando su valor es exacto ó aproximado. Cuando es periódica simple, se convierte en quebrado poniéndole por denominador tantos nueves como cifras tiene el período. Las fracciones mixtas se consideran compuestas de dos quebrados cuyos valores se suman.

La ejecución de las operaciones es como la de los enteros, debiendo

conservarse la coma en la adición y substracción en la columna que ocupa en los datos.

En la multiplicación se separarán del producto tantas decimales como hay en ambos factores; y en la división se hará préviamente que el dividendo y el divisor tengan igual número de cifras decimales.

El valor del resultado de la suma y de la resta con relación á los datos, es el mismo que en enteros. En la multiplicación depende de que un factor sea mayor ó menor que la unidad, y en la división el cociente tendrá la misma relación con el dividendo que la que tenga la unidad con el divisor.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL Y MEDIDAS ANTIGUAS.

180.—Diversas especies de unidades.—Hemos dicho que número es el conjunto de unidades ó de partes de la unidad; y que por unidad se entiende una cantidad elegida arbitrariamente las más veces, para que sirva de término de comparación con todas las de su especie.

En las aplicaciones que se hacen de la aritmética á las necesidades de la vida, es preciso casi siempre considerar, no solo el valor, sino también la especie de las cantidades que entran en los cálculos, y de esto nace la clasificación de las unidades. Por ejemplo, se sabe que el número 8 es igual á la reunión de 8 unidades; pero según sea el caso podrá representar 8 pesos, 8 varas ú 8 horas, y para determinar las diferentes especies de las cantidades se han escogido unidades para cada clase con sus correspondientes denominaciones y subdivisiones.

Las unidades de que se hace uso en matemáticas son de *longitud*, de *superficie*, de *volumen*, de *peso*, de *valor* y de *tiempo*.

Se usa la *unidad de longitud*, cuando se quiere medir ó valuar la distancia entre dos puntos, ó cuando se quiere apreciar una sola dimensión de un cuerpo. Así, por ejemplo, decimos que la distancia de México á Tacubaya, es de dos leguas, y que la altura de un hombre es de 7 piés. En el primer caso se supone conocida la longitud de la legua, y se concibe que la distancia de México á Tacubaya es igual á dos veces la longitud de la unidad escogida. En el segundo ejemplo se compara la estatura de un hombre con el tamaño del pie.

Cuando se estima la extensión en dos dimensiones, su largo y su ancho, prescindiendo del grueso, se valúa su superficie y se compara á la *unidad de superficie*. Por ejemplo, al calcular el valor de un terreno se estima su *superficie*, la cual depende del largo y del ancho del terreno, y se multiplica por el precio de la unidad de superficie, como la vara cuadrada. La unidad que se escoge generalmente para medir la superficie, es un cuadrado, esto es, una figura de cuatro lados en la que tanto los lados como los ángulos son iguales entre sí.

Cuando se consideran las tres dimensiones de un cuerpo, el objeto es valuar su volumen ó capacidad, comparándola con una unidad de la misma clase. Por ejemplo, tratar de saber cuántos tercios de algodón podrán caber en una bodega, ó de medir las fanegas de maíz que hay en un depósito, ó la cantidad de líquido que contiene un barril, son otros tantos casos en que se considera el volumen de los cuerpos, el cual, para poderlo valorizar, es preciso compararlo con una unidad de volumen. La que comunmente se escoje es el cubo, que es un cuerpo de figura semejante á la de un dado limitado por seis caras, que son cuadrados iguales y que tienen por lado la unidad de longitud.

Además de las unidades correspondientes á la extensión lineal, superficial y de volumen, hay necesidad de otra clase de unidad cuando se trata de valuar el peso de un cuerpo. La medida del peso de los cuerpos se refiere á una unidad de esta clase, como la libra ó el gramo, fijándose las condiciones necesarias para que esta unidad tenga un peso constante y bien determinado.

El valor de las cosas se estima en unidades de moneda, el cual valor á su vez depende de la cantidad de cierto metal que contiene la unidad escogida. En las monedas mexicanas la unidad es el peso.

La unidad para medir el tiempo es el día.

Además de estas unidades hay otras especiales usadas en geometría, en mecánica y en otras ciencias.

Definición.—*Sistema métrico-decimal es el conjunto de convenciones hechas para establecer y uniformar las unidades de pesos y medidas de acuerdo con nuestro sistema de numeración, tomando por base la magnitud del Meridiano terrestre.*

181.—Base del sistema métrico-decimal.—La facilidad con que se ejecutan las operaciones de aritmética cuando las fracciones de la unidad se estiman en partes decimales, hizo concebir la idea de servirse en la práctica de unidades y subdivisiones arregladas á este sistema. Además, la diversidad de unidades usadas para un mismo objeto en cada país y aun en los pueblos de un mismo país; la variedad en el sistema de subdivisiones, y la inestabilidad de los patrones ó tipos de las unidades, determinó, á fines del siglo pasado, al gobierno francés á ordenar que se emprendiesen trabajos de gran importancia que debían servir, y sirvieron de base al sistema métrico-decimal de pesos y medidas que vamos á explicar.

Para fijar la unidad lineal, se midió una porción del meridiano terrestre que pasa por París, y de esta medida ejecutada por procedimientos muy precisos, se dedujo la longitud del meridiano terrestre. Esta longitud, dividida en 40 000 000 de partes, determina la magnitud de la unidad de las medidas lineales llamada *metro,* con la cual están relacionadas las demás unidades. Comunmente no se considera la longitud de todo el meridiano terrestre, sino la de la cuarta parte de este círculo á la que se llama cuadrante, por lo cual se dice que el *metro es igual á la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.* La longitud del metro próximamente es igual á una vara y un quinto.

Una vez determinada la magnitud del metro para medir la extensión lineal, éste ha servido de base para las unidades de las otras especies de extensión.

Las superficies se valúan en *metros cuadrados, siendo el metro cuadrado la superficie de un cuadrado que tiene un metro por lado.*

Los volúmenes se estiman en *metros cúbicos, y el metro cúbico es el volumen de un cubo limitado por seis cuadrados iguales de un metro por lado.*

El peso de los cuerpos se estima en *gramos, siendo el gramo el peso de un cubo de agua que tiene la centésima parte de un metro por lado.*

La unidad de moneda escogida en el sistema métrico fué el *franco, que es una pieza del peso de* 5 *gramos, que contiene* $4\frac{1}{2}$ *gramos de plata y* $\frac{1}{2}$ *gramo de cobre.* Las dimensiones del franco están relacionadas al metro.

No siendo cómodo servirse siempre de una misma unidad para medir toda clase de magnitudes, pues se comprende que la unidad que sirve para medir la distancia entre los pueblos, no sería adecuada para valuar el grueso de las monedas; ni la unidad que sirve para pesar la leña, sería á propósito para pesar las pequeñas dosis de substancias empleadas en medicina, se han formado unidades mayores ó menores en el sistema métrico, de acuerdo con las convenciones de la numeración de los enteros y de las decimales, de constituir sucesivamente unidades superiores con la reunión de 10 unidades menores, y subdividir la unidad principal sucesivamente en 10 partes para formar unidades inferiores. Adoptando este sistema, se comprende desde luego que las unidades superiores y las subdivisiones de la unidad, se escriben exactamente como los números enteros y como las fracciones decimales, que el valor de cada especie de unidades queda determinado por el lugar que ocupa el guarismo que la representa, y que las operaciones se ejecutarán como las de los enteros y las decimales.

Para formar los nombres de las unidades superiores, se ha convenido en anteponer las raíces griegas: *deca, hecto, kilo* y *miria,* al nombre de la unidad que se considera. *Deca,* significa diez; *hecto,* cien; *kilo,* mil y *miria,* diez mil. Así, con la longitud de diez metros, se forma una nueva unidad llamada *decámetro.* Reuniendo mil gramos se forma una nueva unidad llamada *kilógramo,* etc.

Para denominar las unidades inferiores, se antepone al nombre de la unidad uno de los radicales latinos *deci, centi* y *mili,* para expresar partes ó unidades *diez, cien, mil veces menores* que la unidad principal. Así, se dice *centímetro,* para expresar una medida cuya longitud es cien veces menor que el metro. El *milígramo,* representa una unidad de peso mil veces menor que el gramo.

Así, pues, la nomenclatura del sistema métrico-decimal, tiene la ventaja de formarse con muy pocas palabras; de conservar el nombre de la unidad principal á que se refiere la que se considera, y de dar cada nombre una idea exacta del valor que con él se denomina.

182.—Diversas unidades del sistema métrico-decimal.— Consideraremos: 1º Unidades lineales; 2º Unidades superficiales; 3º Unidades de volumen; 4º Unidades de peso; y 5º Unidades de moneda.

Unidades lineales.—Se ha tomado como base el *metro, cuya longitud es igual á la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.*

Las unidades mayores que el metro, son:

el decámetro = 10 metros.
el hectómetro = 100 metros.
el kilómetro = 1000 metros.
y el miriámetro = 10000 metros.

Las unidades lineales menores que el metro, son:

el decímetro = la décima parte del metro,
el centímetro = la centésima " "
y el milímetro = la milésima " "

Se ve, pues, que las unidades lineales van siendo sucesivamente 10 veces mayores que su inmediata menor; y siendo este sistema el adoptado para los números enteros y las decimales, naturalmente la escritura de las unidades lineales del sistema métrico, así como las operaciones que con ellas tengamos que ejecutar, estarán sujetas á las reglas dadas para la escritura y para el cálculo de los enteros y de las decimales; bastando correr la coma hacia la derecha para reducir unidades de especie mayor á menor y viceversa.

Así, pues, $\overset{\text{m}}{3745{,}876} = \overset{\text{kilómet.}}{3{,}745876} = \overset{\text{milímet.}}{3745876}$

Unidades superficiales.—La base de las unidades superficiales es el *ara que es la superficie de un cuadrado que tiene diez metros por cada lado.* (1)

Las unidades superficiales mayores que el ara son:
la *hectara,* que es la superficie de un cuadrado que tiene 100 metros por lado.
y la *miriara,* que es la superficie de un cuadrado que tiene 1000 metros por lado.

Las unidades superficiales menores que el ara son:
la *centiara ó metro cuadrado,* que es la superficie de un cuadrado de un metro por lado.
el *decímetro cuadrado,* que es la superficie de un cuadrado de un decímetro por lado.
el *centímetro cuadrado,* que es la superficie de un cuadrado de un centímetro por lado.
y el *milímetro cuadrado,* que es la superficie de un cuadrado de un milímetro por lado.

Las relaciones entre estas diversas unidades son las siguientes:

La miriara = 100 hectaras,
la hectara = 100 aras,
el ara = 100 centiaras,
la centiara ó metro cuadrado = 100 decímetros cuadrados.
el decímetro cuadrado = 100 centímetros cuadrados.
el centímetro cuadrado = 100 milímetros cuadrados.

En consecuencia, las unidades superficiales van siendo sucesivamente 100 veces menores que la unidad inmediata mayor, por lo cual, para reducir unidades superficiales de especie mayor á menor es preciso correr la coma de dos en dos lugares á la derecha y recíprocamente. Por ejemplo:

$$\overset{\text{aras.}}{32584{,}7961} = \overset{\text{hectaras.}}{325{,}847961} = \overset{\text{miriaras.}}{3{,}25847961} = \overset{\text{m. cd.}}{3258479{,}61}.$$

Unidades de volumen.—Estas son: el *esterio* y el *litro.* El *esterio ó metro cúbico, es el volumen de un cubo de un metro por lado.*

(1) La Academia española emplea la palabra *área;* pero en México el uso ha sancionado la de *ara,* que es el nombre con el que la Secretaría de Fomento designó la unidad principal de superficie en el Reglamento expedido en 20 de Febrero de 1896. Por otra parte, es conveniente usar voces distintas para denominar la clase de extensión y la unidad adoptada para valuarla.

El *litro es el volumen de un cubo que tiene un decímetro por lado.*

Los múltiplos del esterio no son usados.

Las unidades de volumen menores que el esterio son:

el decímetro cúbico ó litro, que como acabamos de decir, es el volumen de un cubo que tiene un decímetro por lado;

el centímetro cúbico, que es el volumen de un cubo que tiene un centímetro por lado;

el milímetro cúbico, que es el volumen de un cubo que tiene un milímetro por lado.

La relación entre estas unidades es la siguiente:

El esterio ó *metro cúbico* = 1000 litros;
el *litro* ó *decímetro cúbico* = 1000 centímetros cúbicos;
el *centímetro cúbico* = 1000 milímetros cúbicos.

Por tanto, las unidades de volumen van siendo sucesivamente 1000 veces menores que la que se deduce de la unidad lineal inmediata mayor; y para reducir las de especie mayor á menor, habrá que correr la coma tres lugares á la derecha, y recíprocamente.

m. cúb. lit.
32'465179=32465'179=32465179 cent. cúb.

Las unidades de volumen mayores que el litro, más usadas son:

el decalitro = 10 litros;
el hectolitro = 100 litros;
el kilolitro = 1000 litros.

Las unidades de volúmenes menores que el litro son:

el decilitro = la décima parte del litro;
el centilitro = la centésima parte del litro;
el mililitro = la milésima parte del litro.

Unidades de peso.—En el sistema métrico-decimal, la unidad de peso es el *gramo, que es el peso de un centímetro cúbico de agua, químicamente pura, tomada á la temperatura de 4 grados, porque es á la que tiene mayor densidad.*

Ahora bien, como el volumen de un litro = 1000 centímetros cubicos; y el de un metro cúbico = 1000 litros, supuesto que
un centímetro cúbico de agua pesa un gramo,
un litro ó decímetro cúbico de agua pesará un kilogramo, y
un metro cúbico de agua pesará 1000 kilogramos ó una tonelada métrica.

Las unidades de peso mayores que el gramo son:

el decagramo = 10 gramos,
el hectogramo = 100 „
el kilogramo = 1000 „
el quintal métrico = 100 kilogramos,
y la tonelada métrica = 1000 kilogramos.

Las unidades menores que el gramo son:

el decigramo = la décima parte del gramo,
el centigramo = la centésima „ „
el miligramo = la milésima „ „

Unidades de moneda.—En el sistema métrico se ha tomado por unidad el *franco*, moneda que pesa cinco gramos, estando compuesta de $4\frac{1}{2}$ gramos de plata y $\frac{1}{2}$ gramo de cobre; y tiene 23 milímetros de diámetro. La moneda de oro de 100 francos pesa 32'258 gramos, contiene 9 décimos de oro y 1 de cobre, y mide 35 milímetros de diámetro.

183.—Relación entre las unidades de superficie y de volumen.—*El número de subdivisiones de que consta una unidad de superficie es igual á la segunda potencia del número de subdivisiones de la unidad lineal á que se refiere.*

Hemos visto que el *metro cuadrado* es la superficie de un cuadrado que tiene un metro por cada lado. Si dividimos cada uno de los lados, tanto los dos verticales como los horizontales en 10 partes iguales, y por los puntos de división tiramos líneas paralelas, resultará la superficie de *un metro cuadrado* dividido en 10 hiladas de 10 cuadrados cada una, esto es, en 100 cuadrados iguales, y teniendo cada uno de ellos un decímetro por lado, será un *decímetro cuadrado;* luego *un metro cuadrado es igual á cien decímetros cuadrados*; esto es, al producto de 10 (número de decímetros que tiene el metro lineal) por 10. Si se concibe la superficie de un *decímetro cuadrado,* y si cada uno de sus lados se divide en 10 partes, tirando líneas paralelas por los puntos de división, resultarán 10 hiladas de á 10 *centímetros cuadrados;* luego el *número de centímetros cuadrados que tiene un decímetro cuadrado es igual á* 100, *segunda potencia del número de centímetros qne tiene un decímetro lineal.* Del mismo modo, si en la superficie de *un centímetro cuadrado* se divide cada uno de sus lados en 10 partes, y por los puntos de división se tiran líneas paralelas, resultarán 10 hileras de á 10 cuadrados iguales, cada uno de un *milímetro cuadrado*; luego el número de *milímetros cuadrados que tiene un centímetro cuadrado es igual á 100, segunda* *potencia del número de milímetros que tiene un centímetro lineal.* Y en general, si se observa la figura adjunta, que representa los órdenes inmediatos de dos unidades superficiales en el sistema decimal, y se reflexiona que cuando la *unidad lineal* se divide en cierto número de partes, *la unidad superficial* contendrá tantas subdivisiones superficiales, como resulten de multiplicar el número de partes de la unidad lineal por sí mismo, se comprenderá que *el número de subdivisiones de la unidad de superficie, es igual á la segunda potencia del número de subdivisiones de la unidad lineal.*

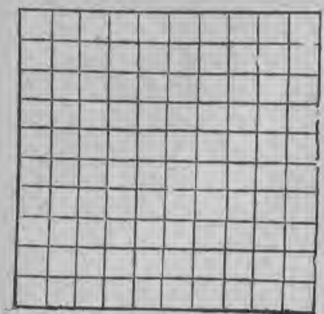

Figura 1.

Esto explica por qué

Un kilómetro cuadrado = 1 miriara = 100 hectaras.
Un hectómetro cuadrado = 1 hectara = 100 aras.
Un decámetro cuadrado = 1 ara = 100 metros cuadrados.
Un metro cuadrado = 1 centiara = 100 decímetros cuadrados.
Un decímetro cuadrado = 100 centímetros cuadrados.
Un centímetro cuadrado = 100 milímetros cuadrados.

Así, pues, en el sistema métrico-decimal, cualquiera unidad de superficie es 100 veces mayor que su inmediata menor; siendo esta la razón de que no se usen la decara ni la kiloara como unidades de superficie.

Es de la mayor importancia en la valuación de las superficies, no confundir las fracciones y los múltiplos del metro cuadrado con la superficie de los cuadrados formados sobre las fracciones ó los múltiplos del metro lineal. Así, por ejemplo, acabamos de ver que *un metro cuadrado* es igual á 100 *decímetros cuadrados*, mientras que el mismo metro cuadrado solo tiene 10 *décimos de metro cuadrado*. Igualmente, un *decámetro cuadrado*, es igual á 100 y no á 10 metros cuadrados.

El número de subdivisiones de que consta una unidad de volumen es igual á la tercera potencia del número de subdivisiones de la unidad lineal á que se refiere.

Dijimos que el *metro cúbico*, llamado *esterio*, es el volumen de un cubo terminado por seis cuadrados que tienen un metro por cada lado. Si como se ve en la figura adjunta, se divide cada uno de los lados de la base en 10 partes iguales y por los puntos de división hacemos pasar rectas paralelas, resultarán en la cara que sirve de base 100 cuadrados iguales de un decímetro por lado, y como sobre estos 100 cuadrados pueden apli-

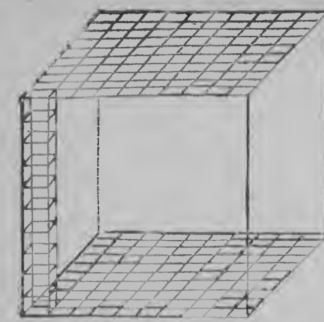

Figura 2.

carse otras tantas columnas verticales de 10 decímetros cúbicos cada una, resulta compuesto el metro cúbico de 1000 decímetros cúbicos, esto es, de $10 \times 10 \times 10$ ó la tercera potencia del número de decímetros que tiene el metro lineal, y como esta construcción puede aplicarse á cualquiera otra unidad de volumen como el *litro*, el *centímetro cúbico*, etc., se comprende que en general *el número de subdivisiones de la unidad de volumen, es igual á la tercera potencia del número de subdivisiones de la unidad lineal.*

Esta es la razón de que
Un decámetro cúbico=1000 metros cúbicos.
Que un *esterio* ó metro cúbico=1000 decímetros cúbicos ó *litros*.
Que un *litro* ó decímetro cúbico=1000 centímetros cúbicos.
Que un centímetro cúbico=1000 milímetros cúbicos.

Así, pues, en el sistema métrico-decimal cualquiera unidad de volumen es mil veces mayor que su inmediata menor.

Al estimar el volumen es preciso tener cuidado de no confundir las fracciones y los múltiplos del metro cúbico con los volúmenes formados sobre las fracciones ó los múltiplos del metro lineal. En efecto, un metro cúbico es *mil veces* mayor que un decímetro cúbico. Un *decámetro cúbico* es igual á 1000 y no á 10 metros cúbicos.

Siendo el volumen de *un litro*, ó decímetro cúbico, igual á 1000 centímetros cúbicos, y el de un metro cúbico igual á 1000 litros; y *pesando un centímetro cúbico de agua un gramo*, se infiere, como ya dijimos, que *un litro de agua pesa 1000 gramos*, ó *1 kilogramo*, y que
un metro cúbico de agua pesa 1000 kilogramos ó *una tonelada*.

184.—Tabla metódica de la nomenclatura y valor de las unidades del sistema métrico.—En el siguiente cuadro consta lo más esencial del sistema métrico-decimal.

Número de unidades y fracciones de ella.	Nombres de los múltiplos y subdivisiones de la unidad.	Nombre de las unidades.	
10000	(M)—Miria.	Metro (m)	Lineal.
1000	(K)—Kilo.	Ara (a)	Sup.
100	(H)—Hecto.		
10	(D)—Deca.	Litro (lit)	Vol.
1	Unidad		
0'1	(d)—Deci.	Esterio (es)	Vol.
0'01	(c)—Centi.		
0'001	(m)—Mili.	Gramo (gram.)	Peso.

VALOR DE CADA UNIDAD.

El *metro* es la longitud de la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.

Ara es la superficie de un cuadrado de 10 metros por lado.

Esterio es el volumen de un metro cúbico.

El *litro* es el volumen de un decímetro cúbico.

El *gramo* es el peso de un centímetro cúbico de agua.

Al lado de las voces empleadas para denominar las diferentes unidades, hemos puesto las abreviaturas que usaremos para cada parte de la palabra que representa, debiendo notarse que hemos adoptado las letras mayúsculas para indicar los múltiplos y las minúsculas para las subdivisiones, representando las unidades con una ó varias letras minúsculas.

En resumen; el sistema métrico-decimal tiene por base el metro, cuya magnitud puede determinarse en cualquier país midiendo una parte del meridiano: la alteración de los tipos ó patrones está evitada, porque se refiere á las dimensiones del globo que habitamos: lejos de haber incoherencia entre las diferentes clases de unidades, todas están relacionadas al metro: para formar las unidades de especie mayor y menor, se ha adoptado el sistema decimal de numeración con la facilidad que proporciona para la escritura y para la ejecución de las operaciones: y la nomenclatura tiene la ventaja de formarse por la combinación de pocas voces, en la que se conserva el nombre de la clase de unidad á que se refiere, y da una idea justa del valor de la que expresa la palabra compuesta. Las ventajas de este sistema se harán más perceptibles explicando el sistema de pesos y medidas usado antiguamente.

185.—Medidas antiguas de México.—1º *Para las medidas de longitud*, se ha escogido como unidad *la vara*, igual á 838 milésimos de metro, y cuyas subdivisiones son las siguientes:

Vara.		Pies		Pulgadas.		Líneas.		Puntos.
1	=	3	=	36	=	432	=	5184.
		1	=	12	=	144	=	1728.
				1	=	12	=	144.
						1	=	12.

La vara suele dividirse en cuatro cuartas, y cada cuarta en doce dedos, y también en 2 medias, ó en 6 sesmas.

Como unidad de longitud mayor que la vara, se tiene la legua, igual á 5000 varas.

2º *Para las medidas superficiales:* se usa la *vara cuadrada* (próximamente igual á 702 milésimas de metro cuadrado,) ó las subdivisiones de esta para las pequeñas superficies: teniendo la vara cuadrada 9 piés cuadrados, y el pié cuadrado 144 pulgadas cuadradas (183). Para las superficies de gran extensión, según sea el caso, se usan las medidas agrarias que ponemos á continuación indicando su valor, y cuya superficie referiremos á la *caballería de tierra* como unidad principal, la cual equivale á hectaras 42'7953.

UNIDADES AGRARIAS DE SUPERFICIE.	FIGURA.	LARGO.	ANCHO.	VALOR DE LA UNIDAD EN	
				Varas cuadradas.	Caballerías
Sitio de ganado mayor....	Cuadrado.	5000	5000	25000000	41'023
Criadero de ganado mayor.	,,	2500	2500	6250000	10'256
Sitio de ganado menor ...	,,	$3333\frac{1}{3}$	$3333\frac{1}{3}$	$11111111\frac{1}{9}$	18'233
Criadero de ganado menor.	,,	$1666\frac{2}{3}$	$1666\frac{2}{3}$	$2777777\frac{7}{9}$	4'558
Caballería de tierra......	Paralelógº	1104	552	609408	1 ,,
Fanega de sembradura de maíz................	,,	276	184	50784	$\frac{1}{12}$

3º *El volumen* de los cuerpos puede estimarse en *varas cúbicas* y sus subdivisiones, en el concepto de que la vara cúbica, (igual á 588 milésimos de metro cúbico), tiene 27 piés cúbicos, y que el pié cúbico tiene 1728 pulgadas cúbicas (183); pero las medidas usuales *de capacidad ó de volumen*, son el *cuartillo* para los líquidos y *la fanega* para los granos ó semillas. Aunque en los patrones de la ciudad de México se ha encontrado que el cuartillo destinado para la medida de todos los líquidos, contiene de agua 0'991347 libras; y que el cuartillo destinado para la medida de aceite, contiene de agua 1'099764, la mente de los creadores de nuestro antiguo sistema de pesos y medidas debe haber sido que el cuartillo contenga una libra, de lo cual difieren poco los modelos usados en el Fiel-contraste de México. *

La fanega para la medida de los áridos, es igual á 7200 pulgadas cúbicas y equivale á 90 815 litros.

Las subdivisiones de las medidas de volumen son las siguientes:

Para los líquidos:

1 barril = 9 jarras = 162 cuartillos.
1 „ 18 „

Para los granos.

Carga.	Fanega.	Medias.	Cuartillas.	Almudes.	Cuartillos.	Volúmenes.
1	2	4	8	24	96	14400 pulgs. cúbs.
	1	2	4	12	48	7200 „
		1	2	6	24	3600 „
			1	3	12	1800 „
				1	4	600 „
					1	150 „

4° *Para la medida de las aguas* de los manantiales, y para las mercedes de abasto en las poblaciones, se ha escogido como unidad *la paja*, que es el caudal que produce un cuartillo ó una libra de agua en un minuto. Los múltiplos de la paja son los siguientes:

Buey		Surcos		Naranjas.		Reales		Pajas.
1	=	48	=	144	=	1152	=	20736
		1	=	3	=	24	=	432
				1	=	8	=	144
						1	=	18

Cuando la velocidad del agua es 270 milésimos de vara por segundo el buey es la cantidad que puede pasar en un minuto por la superficie de una vara cuadrada; y una paja es la cantidad de agua que pasa en un minuto por una abertura que tiene por superficie $\frac{1}{16}$ de pulgada cuadrada.

5° *Para valuar el peso de los cuerpos* se usa la *libra*, cuyo peso se ha visto que es próximamente el de la cantidad de agua que contiene un cuartillo, y equivale al de 460 gramos. Las subdivisiones de la libra son diferentes según sea que se emplee esta unidad para los usos comunes, para pesar la plata, el oro ó las substancias medicinales. Vamos á indicar las subdivisiones usadas ó relativas á la libra como unidad de peso en cada uno de estos casos.

* El volumen 1'099764 multiplicado por 0'915 densidad del aceite de olivo, da 1'006 de aceite. libra.

Para los usos comunes.

Quintal.	Arrobas	Libras	Onzas.	Adarmes.	Tomines.	Granos.
1	4	100	1600	25600	76800	921600
	1	25	400	6400	19200	230400
		1	16	256	768	9216
			1	16	48	576
				1	3	36
					1	12

Para el peso de la plata.

Libra.	Marcos.	Onzas.	Ochavas.	Tomines.	Granos.
1	2	16	128	768	9216
	1	8	64	384	4608
		1	8	48	576
			1	6	72
				1	12

Para el peso del oro.

Libra.	Marcos.	Castellanos.	Tomines.	Granos.
1	2	100	800	9600
	1	50	400	4800
		1	8	96
			1	12

Para los usos medicinales.

Libra.	Onzas.	Dracmas.	Escrúpulos.	Granos.
1	16	128	384	9216
	1	8	24	576
		1	3	72
			1	24

Tanto en los usos comunes, como para pesar la plata y las substancias medicinales, la libra tiene 9216 granos, pero cuando se usa para pesar el oro, la misma unidad tiene 9600 granos.

6° *Para las monedas* la unidad es el *peso*, que es una pieza compuesta de $\frac{65}{72}$ partes de plata y $\frac{7}{72}$ de cobre, esto es, de 902'(7) milésimas de plata, y 97'(3) de cobre y que pesa $\frac{1}{17}$ de libra. En las *monedas de oro* la unidad es también el *peso*, la moneda de este valor pesa $\frac{1}{17}$ de onza y se compone de $\frac{7}{8}$ de oro y $\frac{1}{8}$ de cobre, esto es, 875 milésimas de oro y 125 de cobre.

Hay monedas de plata con el valor de 1 peso, de 50, de 25, de 10 y de 5 centavos y antiguas de 1 peso, de 4 reales, de 2, de 1, y de $\frac{1}{2}$ real. Monedas de oro se acuñan actualmente con los valores de 1 peso, de $2\frac{1}{2}$, de 5, de 10 y de 20 pesos; y antiguamente se acuñaban con los valores de un peso, de 2, de 4, de 8 y de 16 pesos, llamándose *escudos* las monedas de á 2 pesos y *onzas* á las de á 16 pesos. Monedas de cobre las hay con el valor de un centavo de peso, y antiguas con el de 1 tlaco.

Onzas.		Escudos		Pesos		Reales.		Tlacos.
1	=	8	=	16	=	128	=	1024
		1	=	2	=	16	=	128
				1	=	8	=	64
						1	=	8

El peso se subdivide en 100 centavos, y el real se consideraba dividido nominalmente en 12 granos.

7° Para la medida del *tiempo* la unidad es el *día*, que es la duración de una revolución de la tierra al rededor de su eje. Un mes se considera en los cálculos compuesto de 30 días y el año de 12 meses ó de 365 días. Un lustro es igual á 5 años, y un siglo igual á 100.

Días.		Horas.		Minutos.		Segundos.
1	=	24	=	1440	=	86400
		1	=	60	=	3600
				1	=	60

Para ejecutar los cálculos con el sistema de pesos y medidas comunes, es necesario proceder por partes ó convertir las subdivisiones en quebrados ó en decimales, según lo explicaremos al tratar de los números denominados; pero además de los inconvenientes que resultan de la mayor complicación en las operaciones, en el sistema común de pesos y medidas, falta, como se habrá observado, la sencillez de la nomenclatura del sistema métrico; hay incoherencia entre las medidas lineales, las de volumen y las de peso; el orden de las subdivisiones carece de sistema; es variable de una unidad á otra, y aun sucede que la misma unidad,

como la vara y la libra, se subdivide de diferentes maneras, por lo cual es más difícil conservar este sistema en la memoria, y por último, la misma voz expresa unidades diferentes.

Al tratar de las medidas comunes, debemos repetir que la unidad superficial se compone del cuadrado ó 2ª potencia del número de subdivisiones de la unidad lineal; y que la unidad de volumen se compone del cubo ó 3ª potencia del número de subdivisiones de la unidad lineal. Por esta razón una vara cuadrada tiene 9 piés cuadrados, y un pié cuadrado tiene 144 pulgadas cuadradas; así como una vara cúbica tiene 27 piés cúbicos, y un pié cúbico tiene 1728 pulgadas cúbicas.

186. — Correspondencia entre las medidas antiguas y las del sistema métrico.—Vamos á poner á continuación la equivalencia entre las principales unidades comunmente usadas y las del sistema métrico, y viceversa.

Medidas de longitud.

			m
1	vara (3 piés)	=	0'838.
1	pié (12 pulgadas)	=	0'279 (3).
1	pulgada (12 líneas)	=	0'023278.
1	legua (5000 varas)	=	4190 metros.

			varas.
1	metro	=	1'193317.
1	kilómetro	=	1193'317422.

Medidas de superficie.

			metros cuadrados.
1	vara cuadrada (9 piés cuadrados)	=	0'702244.
1	pié cuadrado (144 pulgds. cuadradas)	=	0'078027.
1	sitio de ganado mayor (5000^2 varas)	=	1755'61 hect.
1	criadero idem idem, (2500^2 varas)	=	438'9025 hect.
1	sitio de ganado menor ($3333\frac{1}{3}^{2}$ varas)	=	780'2711 hect
1	criadero idem idem, ($1666\frac{2}{3}^{2}$ varas)	=	195'067777 hect.
1	caballería (1104×552=609408 v. cuad)	=	42'795311 hect.
1	fanega (276×184=50784 v cuads.)	=	3'566276 hect.

			v cuads.
1	metro cuadrado	=	1'424.
1	ara	=	142'400647 varas cuadradas.
1	hectara	=	14240'064707 varas cuadradas.
1	hectara	=	0'023367 caballerías.

Medidas de volumen.

m. cúbico.
1 vara cúbica (27 piés cúbicos) = 0'588480.
1 pié cúbico (1728 pulgadas cúbicas) = 0'021796.
litros
1 cuartillo para líquidos = 0'456264.
1 cuartillo para aceite = 0'506162.

---

v. cub
1 metro cúbico = 1'699292.
cuartillo de liq.
1 litro = 2'191716.
cuartillo de aceite.
1 litro = 1'975651.

Medidas de capacidad para granos.

litros.
1 carga (2 fanegas) = 181'629775
1 fanega (48 cuartillos) = 90'814888.
1 cuartillo (150 pulgadas cúbicas) = 1'891977.

---

1 hectolitro = 0'550571 cargas.

Medidas para manantiales y mercedes de agua.

litro por minuto.
1 buey (48 surcos) = 9543'661056.
1 surco (432 pajas) = 198'826262.
1 paja (1 libra por minuto) = 0'460246. (*)

---

pajas
1 litro de agua por minuto = 2'172749 de á una libra.

Medidas de peso.

kil.
1 quintal (4 arrobas) = 46'024634.
1 arroba (25 libras) = 11'506159.
1 libra (16 onzas) = 0'460246.
1 onza (576 granos) = 0'028765.
gramos.
1 grano = 0'050.

---

1 kilogramo = 2'172749 libras.
1 gramo = 20 granos.

(*) Por la ley de 2 de Agosto de 1861, la paja es igual á 0'45 de litro por minuto; pero hemos creido preferible que las unidades de volumen de aguas queden relacionadas exactamente á las de peso, conforme á la base de que una paja produce en un minuto un cuartillo de agua de una libra, según lo ordenó el Virrey Revillagigedo, fundándose en las experiencias practicadas por Don Miguel Constansó en Mayo de 1792, base que debe aplicarse en los casos de títulos y documentos anteriores á Agosto de 1861.

Monedas.

francos
1 peso de plata = 5'431.
1 peso de oro = 5'100.
$
1 franco de plata = 0'184.
1 franco de oro = 0'196.

Las anteriores relaciones entre las unidades lineales, de superficie, de volumen, de peso y de moneda del sistema métrico y las mexicanas, sirven para convertir unas en otras, y á fin de que los alumnos puedan hacer sin vacilación estas reducciones tan frecuentes en la práctica daremos la siguiente

Regla.—Cuando el número que expresa la equivalencia con la unidad *es heterogéneo con la cantidad que trata de convertirse, se multiplicará* esta por la equivalencia; pero cuando el número que expresa la equivalencia con la unidad *sea de la misma especie que la cantidad que va á reducirse, se dividirá* ésta por la equivalencia.

Por ejemplo, siendo una vara $=0\overset{m}{'}838$ se quiere reducir 22 varas á metros.

En este caso, siendo *heterogéneos* $0\overset{m}{'}838$ y 22 varas, *multiplicaremos* estos números para obtener que 22 varas equivalen á $\overset{m}{18}'436$.

Si se quieren convertir 30 varas en metros, sabiendo que un metro $=\overset{v}{1}'193$.

Como en este ejemplo $1^{v}'193$ y 30 varas son cantidades *homogéneas*, *dividiremos* el último número por el primero para saber que 30 varas equivalen á $\overset{m}{25}'146$.

CALCULO DE LOS NUMEROS DENOMINADOS.

DEFINICIONES, PRINCIPIOS Y OPERACIONES FUNDAMENTALES.

187.—Definición.—*Se llaman números complexos ó denominados los que se componen de varias partes expresadas como números enteros y concretos de diferentes especies, pero relativas todas á una misma clase de unidades.* Por ejemplo: 3 varas, 2 pies y cinco pulgadas. La vara, los pies y las pulgadas son partes que están expresadas en la forma de números enteros y concretos de diferentes especies entre sí, pero relativas todas á la clase de unidades lineales.

188.—Subdivisiones, nomenclatura y escritura.—El sistema de subdivisiones usado en el cálculo de los números complexos ó denominados, así como la nomenclatura, es convencional y variable en razón de las necesidades, de las costumbres y aún del capricho de los pueblos. En el párrafo 185 hemos explicado las unidades usadas en México, su nomenclatura y las subdivisiones de cada una.

En cuanto á la escritura, se indica separadamente cada una de las partes relativas á la clase de unidades que se considera como número entero, marcando su especie encima, por medio de un signo convencional ó por alguna abreviatura. Por ejemplo: 728 pesos, 6 reales, 4 tlacos se escriben así:

$$\overset{\$}{728}-\overset{rls.}{6}-\overset{tls.}{4}.$$

En cuanto al número de partes de que consta cada especie de unidades es necesario grabarlo en la memoria para ejecutar los cálculos correspondientes.

189.—Operaciones fundamentales.—Las de los números denominados son dos: reducir unidades de especie mayor á menor, y reducir unidades de especie menor á mayor.

Para reducir unidades de especie mayor á menor, siendo un uso de la multiplicación, *se multiplican las unidades de especie mayor por el número de unidades menores de que consta una mayor, y se agregan á este producto las unidades de su especie.*

Por ejemplo: sea por reducir á onzas............ $\overset{qq}{32}-\overset{@}{2}-\overset{lb}{20}-\overset{onz.}{4}$

Se multiplicarán los quintales por 4 para reducirlos á arrobas y se le agregará 2 arrobas al producto. Siendo 32 quintales, 2 arrobas, igual á 130 arrobas. Este número se multiplicará por 25 para reducirlo á libras y se le agregará 20 libras; siendo 32 quintales, 2 arrobas, 20 libras=3270 libras; este número se multiplicará por 16 para reducirlo á onzas y se agregarán 4 onzas al producto.

```
    4
@ 130
   25
  650
 260
   20
lb 3270×16
  19624
  52324 onzas.
```

Resulta que:

$$32 \text{ qq. } 2\ @-20 \text{ lb}-4 \text{ onzas}=52324 \text{ onzas.}$$

Para reducir unidades de especie menor á mayor; siendo éste un uso de la división, *se dividen las unidades menores por el número de estas de que se compone una mayor, el cociente indica el número de unidades mayores, y la resta el de las menores.*

Por ejemplo, se quiere reducir á varas 589 pulgadas.

```
pulgs. 589 | 12
       109 | pies 49 | 3
         1 |      19 | 16 vs.
           |       1 |
```

Dividiendo 589 pulgadas entre 12 se obtienen 49 pies una pulgada. Los 49 pies los reduciremos á varas, dividiéndolos por 3, y se obtienen 16 varas y 1 pie.

En definitiva, resulta que:

$$589 \text{ pulgadas} = 16 \text{ varas}-1 \text{ pie}-1 \text{ pulgada.}$$

190.—Conversión de los denominados en quebrados y en decimales y recíprocamente.—Los problemas que frecuentemente se ofrecen entre los números quebrados, decimales y denominados, ya para ejecutar las operaciones, ya para expresar el resultado de ellas en la forma conveniente, son cuatro: 1º convertir un denominado en quebrado; 2º, un quebrado en denominado; 3º, un denominado en decimal; y 4º, un decimal en denominado.

1º *Para convertir un número denominado en quebrado, se reduce á la especie menor y se le pone por denominador el número de unidades menores de que se compone la mayor.*

Si se quiere convertir en quebrado 36 h.—48 m.—40 s., se reducirán las horas á minutos y éstos á segundos, resultando 132520 segundos y á éste número se le dará por denominador el número de segundos que tiene una hora, esto es, 3600, y se tendrá:

```
 h.  m   s.
36—48—40
   60
 2208
   60
132520
```

36 h.—48 m.—40 s.$=\frac{132520}{3600}$ horas.

El fundamento de esta regla es que el valor del denominado no se ha alterado al reducirlo á unidades de especie menor, y que como el denominador de un quebrado indica el número de partes en que está dividida la unidad, el número de unidades menores de que consta una mayor, deberá ser el denominador del quebrado.

2º *Para convertir un quebrado en denominado, se divide el numerador por el denominador, y si hay resta se valúa* (151) *en la subdivisión de la unidad á que se refiere, continuando así la operación.*

Por ejemplo, si se quiere transformar en denominado el quebrado $\frac{875}{325}$

de barril, se ejecutarán las operaciones que constan al lado:

875	325
225	2 bars.—6 jarras,—4 cuarts.
9	
2025	
75×18	
600	
1350	
50	

y resulta que:

$$\overset{\text{barril.}}{\tfrac{875}{325}} = \overset{\text{bars.}}{2} - \overset{\text{js.}}{6} - \overset{\text{cs.}}{4\tfrac{2}{13}}$$

Como convertir un quebrado en denominado es valuarlo, el fundamento de esta operación es el que hemos dado (151) al tratar de la valuación de los quebrados, y que consiste en servirse de la multiplicación para reducir unidades de especie mayor á menor y en extraer los enteros de un quebrado impropio dividiendo el numerador por el denominador.

3º *Para convertir un denominado en decimal, se transforma primero el denominado en quebrado, y en seguida éste en decimal.*

Por ejemplo, se quiere convertir en decimal: $8^{\$}—4^{\text{rs.}}—4^{\text{tls.}}$

Se convertirá primero en quebrado resultando $\frac{548}{64}$$ En seguida se transforma este quebrado en decimal resultando igual á $ 8‘5625. Siendo el valor del denominado igual al del quebrado, y el de éste á la decimal, en el caso de que nos ocupamos.

$	rs.	tls.
8—	4—	4
8		
68		
8		
$548^{\text{tls}} = \frac{548}{64}$$		

$$8^{\$}—4^{\text{rls.}}—4^{\text{tls.}}=8‘5625$$

548	64
360	$ 8‘5625
400	
160	
320	
00	

* (Simplificación). — Cuando el denominado que quiere transformarse en decimal, sólo consta de dos clases de unidades, la operación puede simplificarse, multiplicando las subdivisiones del denominado por el número de centésimos á que sea igual cada subdivisión.

Por ejemplo, si se quiere transformar en decimal 7@—16 lb, bastará observar que una libra $=\frac{1}{25}$ arroba, y que $\frac{1}{25}$=0‘04, por lo cual multiplicando 16 lb. por 4=64, se tiene que:

$$7@—16\text{ lb}=\overset{@}{7‘64}$$

2º Ejemplo.—Se quiere transformar 15 lb—10 onzas en decimal. Como 1 onza$=\frac{1}{16}$ lb y $\frac{1}{16}$=0‘06$\frac{1}{4}$, multiplicaremos $10^{\text{onzas}}\times 6\frac{1}{4}=62\frac{5}{10}$ y se tendrá:

$$15^{\text{lb.}}—10^{\text{onz}}=\overset{\text{lb}}{15‘625}.$$

Para ejecutar esta simplificación en los casos más frecuentes, los alumnos pueden recordar las siguientes relaciones:

$\frac{1}{2}$	= 50	centésimos
$\frac{1}{4}$	= 25	„
$\frac{1}{8}$	= 12$\frac{1}{2}$	„
$\frac{1}{12}$	= 8$\frac{1}{3}$	„
$\frac{1}{16}$	= 6$\frac{1}{4}$	„
$\frac{1}{25}$	= 4	„

4º *Para convertir una cantidad decimal en denominado, se tomará la parte entera con su especie, y la parte decimal se multiplicará por el número de subdivisiones de que conste la unidad á que corresponde, separando en el producto igual número de cifras decimales. En este resultado se tomará la parte entera con su especie y la decimal se multiplicará por el número de subdivisiones de la unidad á que corresponde, y así se continuará la operación hasta llegar á la última subdivisión.*

Por ejemplo, se quiere transformar en número complexo, $\overset{\text{marcos}}{135‘8675}$

	marcos 135‘8675
	8
onzas	6‘9400
	8
ochavas	7‘52
	6
tomines	3‘12×12
	24
granos	1‘44

Tomaremos desde luego la parte entera 135 marcos, y reduciremos á onzas la parte 0‘8675 multiplicándola por 8, lo que da 6 onzas y 94 centésimas. La parte decimal la reducimos á ochavas; 0‘52 de ochava los reducimos á tomines, y por último, 12 centésimas de tomines las reducimos á granos. Obteniéndose que:

$$\overset{\text{Marcos}}{135‘8675} = \overset{\text{Marcos}}{135} — \overset{\text{Onz.}}{6} — \overset{\text{Och.}}{7} — \overset{\text{Ts.}}{3} — \overset{\text{Gr.}}{1‘44}.$$

Esta operación tiene por fundamento que es un uso de la multiplicación reducir unidades de especie mayor á menor.

ADICION DE LOS DENOMINADOS.

191.—Regla.—*Para sumar los números denominados, se colocan las cantidades unas debajo de otras, lo mismo que en los enteros, teniendo cuidado de poner separadamente cada especie de unidades formando una columna vertical. Se tira una línea horizontal para separar el resultado, y* *se comienza la operación por las unidades de especie menor; si la suma no consta del número de unidades que componen una mayor, se escribe la suma debajo de la columna de su especie; y en caso contrario, se reduce la suma á la especie inmediata mayor, escribiéndose el número de unidades menores que queden, como resta en la división, debajo de la columna correspondiente; y se retienen las unidades mayores para unirlas á las de su especie. Con cada clase de unidades se repite la misma operación, y en las de mayor especie se escribe la suma tal como sale.*

Sean por sumar las siguientes cantidades:

Cargas.	fs.	alms	cts
345	1	9	3
200	0	10	2
175	1	8	2
875	1	6	1
100	0	9	2
50	1	3	1
90	1	2	2
162	1	11	3
2002	1	2	0

16 cuartillos = 4 almudes.
62 almudes = 5 fs.—2 alms.
11 fanegas = 5 cgs.—1 fs.

Se comienza la operación sumando los cuartillos, lo cual da 16 cuartillos; y como un almud se compone de 4 cuartillos, dividiendo 16 por 4, se obtienen 4 almudes, que se retienen para reunirlos á la columna de los almudes, y se pone 0 en la de los cuartillos.

Sumando los 4 almudes retenidos con la columna correspondiente, se obtienen 62 almudes, que se reducen á fanegas dividiendo por 12, de lo que resultan 2 almudes que se escriben debajo, y 5 fanegas que se agregan á la columna correspondiente. La suma de las fanegas da 11, que reducidas á cargas, dan 5 cargas y 1 fanega. Este último número se escribe en la columna que le corresponde, y las 5 cargas se agregan á las unidades de esta especie, cuya suma es 2002 cargas y la suma total es:

2002 cargas—1 fanega—2 almudes.

La prueba de esta operación se hace como la de los enteros, repitiéndola en sentido contrario, esto es, si se sumó de arriba para abajo, se suma de abajo para arriba, y debe obtenerse el mismo resultado; ó se dividen los sumandos cuando son muchos en varias porciones, se hace la suma de cada porción, y en seguida se suman las sumas parciales, debiéndose obtener un resultado igual al primero, si no se ha cometido ninguna equivocación.

SUBSTRACCION DE LOS DENOMINADOS.

192.—Regla.—*Para restar los números denominados, se colocan las cantidades unas debajo de otras, lo mismo que en los enteros, teniendo cuidado de poner separadamente cada especie y las del substraendo debajo de las correspondientes del minuendo. Se tira una línea horizontal y se comienza á ejecutar la resta por las unidades de menor especie, restando cada parte del substraendo de la superior del minuendo. Cuando alguna de las partes del substraendo es mayor que la correspondiente del minuendo para poder ejecutar la resta, se agrega al minuendo una unidad de la especie inmediata mayor reducida á la menor, y para no alterar el valor de la diferencia, se le agrega una unidad á la parte inmediata mayor del substraendo, al continuar la operación.*

Sea como primer ejemplo encontrar la diferencia entre

Surcos.	Naranjas.	Reales.	Pajas.
36	2	6	16
24	2	5	8
12	0	1	8

Como cada parte del substraendo en este ejemplo ha sido menor que la correspondiente del minuendo, se ha ejecutado la substracción haciendo uso de la primera parte de la regla.

Sea como segundo ejemplo encontrar la diferencia entre

2078 $	—4 rs.	— 5 tls.
894	—6	— 6
1183	—5	— 7

Aquí, como de 5 tlacos no se puede restar 6, se le agrega á la parte 5 tlacos del minuendo un real reducido á tlacos, y la diferencia de 6 á 13 tlacos, que es 7, se escribe debajo, reteniéndose un real para agregarlo á los reales del substraendo y no alterar la diferencia. Así se dice: 6 y 1 son 7, que no pudiendo restarse de 4, se le agrega á este último número un peso reducido á reales, y la diferencia 5 entre 7 y 12 reales se escribe debajo, reteniendo un peso para agregarlo á los pesos del substraendo al continuar la operación. Así se dice; 4 y 1 son 5, á 8, la diferencia es 3; de 9 á 17, 8 y va 1; de 9 á 10, 1 y va 1, á 2, la diferencia es 1. La diferencia total es 1183 \$—5 rs.—7 tlacos.

La prueba de esta operación se ejecuta como la de enteros, sumando el substraendo con la resta, y cuando no se ha cometido equivocación, la suma debe ser igual al minuendo.

MULTIPLICACION DE LOS DENOMINADOS.

193.—Regla general.—La multiplicación de denominados se ejecuta de dos modos: transformándolos en quebrados, ó por partes alícuotas.

Para multiplicar un denominado por otro, primero se convierten el multiplicando y el multiplicador en quebrados; segundo, se multiplican los quebrados; y tercero, se transforma el quebrado que resulta en denominado valuándolo en la especie de las unidades de que deba ser el producto.

Antes de multiplicar los quebrados, se abrevian cuando es posible.

Por ejemplo: se quiere saber cuánto valdrán 32@ 8 lb., 12 onzas de cobre á razón de 7 \$—2 rs.—4 tlacos la arroba.

La operación se dispone como sigue:

```
 @  lb onzs.      $ rs. tls.
32—8—12          ×7—2—4
 25                 8
---               ---
160                58
 648                8
---               ---
 808 × 16         468
4848
  12
-----
12940
```

$$\frac{\overset{647}{\cancel{12940}}}{\underset{20}{\cancel{400}}}\times\frac{\overset{117}{\cancel{468}}}{\underset{16}{\cancel{64}}}=\frac{647\times117^{\$}}{20\times16}=236^{\$}—4^{rs.}—3^{tls.}\ \tfrac{4}{5}$$


```
647 × 117
 647
 4529                       4
-----                      32
7569(9 | 32(0             256
 116   | 236—4—3+ ----
  209                     320
   179                     40
     8                      5
 ----
 1432
  152
 ----
 1216
  256
```

Después de haber reducido el multiplicando y el multiplicador á su menor especie, se convierten en los quebrados $\frac{12940}{400}$ de arroba, y $\frac{468}{64}$ de peso. Estos quebrados se abrevian y se multiplican $\frac{647}{20}$ @ por $\frac{117}{16}$ \$. Como el producto debe expresar pesos, al quebrado que resulta de la multiplicación se le sacan los enteros y se valúa en reales y en tlacos; obteniéndose que el valor del cobre es

$$236\ \$—4\ \text{rs.}—3\ \text{tlacos}\ \tfrac{4}{5}$$

Después de haber convertido los denominados en quebrados, la multiplicación de éstos también puede hacerse transformándolos en decimales.

Cuando el multiplicador, además de ser incomplexo, solo consta de unidades, se abrevia la operación comenzando la multiplicación por las unidades de especie menor, y se determina, lo mismo que en la suma, el número de unidades de la especie inmediata mayor y de la menor, que contenga el producto; éstas últimas se escriben debajo de las de su especie y las primeras se retienen en la memoria para reunirlas al producto del multiplicador por las unidades de la especie inmediata mayor, continuándose así la operación hasta las unidades del orden mayor.

Sea como ejemplo averiguar el valor de 6 varas á razón de 25 pesos —3 reales—9 granos. La operación se dispone y ejecuta como sigue:

```
  $  rs. gs.
  25—3—9
   6
-----------
$ 152—6—6
```

Se comienza multiplicando 6 por 9 granos=54 granos=4 reales y 6 granos. Se escriben los 6 granos y se retienen los 4 reales. Multiplicando 6 por 3 reales se obtienen 18, y 4, son 22 reales=2\$ que se retienen, y 6 reales que se ponen en el lugar correspondiente. Por último, se multiplica 6 por 25$ y se agregan al producto los dos pesos retenidos, siendo el valor de las 6 varas.

152 $—6 reales—6 granos.

Esta operación es realmente una suma abreviada.

194.—Multiplicación de los denominados por partes alícuotas.—*Se llaman partes alícuotas de un denominado aquellas en que puede descomponerse y que respectivamente son equivalentes á quebrados de la especie inmediata mayor que tienen por numerador la unidad.*

Por ejemplo: 7 rs. es igual á 4 rs.+2+1 real$=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}$\$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$\$ siendo estas tres últimas fracciones de la unidad inmediata mayor las partes alícuotas en que se pueden descomponer 7 reales. Muchas veces las alícuotas son relativas; así, en el ejemplo anterior estando compuesto 7 reales de 4+2+1 real, se tiene que 4 reales es la mitad de un peso; 2 reales es igual á la mitad de 4 reales; y un real es la mitad de 2 reales.

El conocimiento de los factores primos de que consta un número, es de gran auxilio para la determinación de las partes alícuotas de los denominados. Cuando la unidad está dividida en 25 partes, como la arroba, las partes alícuotas se determinan de 5 en 5 y de 1 en 1 subdivisión. Cuando la unidad está subdividida en 16 partes, se buscan partes alícuotas compuestas de 8, 4, 2 y 1 subdivisiones. Cuando la unidad consta de 12 subdivisiones, las partes alícuotas se componen de 6, 3, 4, 2 y 1. Y cuando la unidad consta de 8 subdivisiones, las partes alícuotas se componen de 4, de 2 y de 1 subdivisiones.

Para la multiplicación de los denominados por partes alícuotas, es conveniente distinguir dos casos: 1º, *cuando el multiplicador es incomplexo; 2º cuando el multiplicador es complexo.*

Primer caso.—*Cuando el multiplicador es incomplexo, se multiplica primero por las unidades de especie mayor del multiplicando, como números enteros; y en seguida por cada una de las partes del multiplicando descompuesta en sus alícuotas.*

En la multiplicación de los denominados es indispensable determinar cuál de los dos factores es el multiplicando, que como se sabe, es el término de la especie que se busca en el resultado, pues de esta misma especie deben ser los productos parciales.

Por ejemplo, se quiere saber cuánto valdrán 285 libras de vainilla á razón de 15$ 6 rs. 4 tlacos la libra. Supuesto que el resultado que se busca ha de expresar pesos, la última cantidad será el multiplicando, y la operación se dispone y ejecuta como sigue:

15 $—6 rs.—4 tls.	
285	
75	libras
120	285 × 15 $
30	
142—4	285 × 4 rs.
71—2	285 × 2 rs.
17—6—4	285 × 4 tls.
$ rs. tls.	
4506—4—4	

La ejecución de la operación debe concebirse de esta manera: si cada libra valiera solo 15 pesos, el valor de 285 libras sería el producto de estos dos números; pero como la libra vale 15 pesos—6 rs.—4 tlacos, es preciso agregar al producto anterior el valor de 285 libras á razón de 6 reales 4 tlacos. *Si la libra valiera un peso, 285 libras valdrían 285 pesos,* y de este valor, que *es un producto auxiliar,* deduciremos el de las mismas libras á 6 reales 4 tlacos. Descomponemos primero 6 reales en sus partes alícuotas, 4$=\frac{1}{2}$ de peso, y 2 reales$=\frac{1}{2}$ de 4 reales: y decimos, que supuesto que 285 libras á 1 peso valen 285 pesos, las mismas 285 libras á 4 reales, valdrán la mitad de 285 pesos, esto es, 142 pesos 4 reales, segundo producto parcial. Si 285 libras á 4 reales valen 142 pesos 4 reales, á 2 reales valdrán la mitad de esta cantidad, esto es, 71 pesos 2 reales. A razón de 4 tlacos, que es la cuarta parte de 2 reales, valdrán la cuarta parte de esta cantidad, esto es, 17 pesos—6 reales—4 tlacos. Y en consecuencia, el valor de las 285 libras á razón de 15 pesos—6 reales—4 tlacos, es la suma de los productos parciales, igual á 4506 pesos—4 reales—4 tlacos.

2º caso.—*Cuando el multiplicador es complexo, se ejecuta la operación como si fuera incomplexo, conforme á la regla dada para el primer caso, prescindiendo al principio de las unidades de menor especie que acompañan al multiplicador. En seguida se descomponen las unidades menores del multiplicador en sus partes alícuotas y se multiplica todo el multiplicando sucesivamente por cada una de ellas. Sumando los productos parciales, se tendrá el total.*

Sea como ejemplo determinar el valor de 425 varas—2 pies—5 pulgadas á razón de 36 pesos—5 reales—10 granos. Siendo esta última cantidad el multiplicando, la operación se ejecuta como sigue:

$36^{\$}$ —$5^{rs.}$ —$10^{gs.}$
$425^{vs.}$ —$2^{ps.}$ —$5^{ps.}$

180
72
144

Valor de 425 $^{vs.}$ á $36^{\$}$	....	$15{,}300^{\$}$	
„	id. á 4 rs.	212—4 rs.	
„	id. á 1 rl.	53—1 gs.	
„	id. á 6 gs.	26—4—6	
„	id. á 3 gs.	13—2—3	
„	id. á 1 gs.	4—3—5	
Valor de 425^{vs} á $36^{\$}$ $5^{rs.}$ $10^{gs.}$	....	15,609—7— 2	
Idem de 1 pie á id.	....	12—1—11	$\frac{1}{3}$ $\frac{12}{36}$
Idem de 1 pie á id.	....	12—1—11	$\frac{1}{3}$ $\frac{12}{36}$
Idem de 4 pulgadas á id.	....	4—0— 7	$\frac{7}{9}$ $\frac{28}{36}$
Idem de 1 pulgada á id.	....	1—0— 1	$\frac{34}{36}$ $\frac{34}{36}$

Valor de 425^{vs} 2^{p} $5^{ps.}$ á $36^{\$}$ 5^{rs} $10^{gs.}$=$15{,}639^{\$}$—$3^{rs.}$—$10^{gs.}$ $\frac{17}{36}$ $\frac{86}{36}=2+\frac{14}{36}$

Al principio hemos prescindido de los 2 pies 5 pulgadas que acompañan al multiplicador, y después de haber hallado conforme á la regla del primer caso el valor de sólo 425 varas, (valor que para mayor claridad hemos sumado y es igual á 15,609 pesos—7 reales—2 granos) nos ocupamos en determinar el valor de las partes del multiplicador. Supuesto que una vara vale 36 pesos—5 reales—10 granos, un pie valdrá la tercera parte de esta cantidad, y 2 pies valdrán dos veces 12 pesos—1 real—11 granos $\frac{1}{3}$. Respecto á las 5 pulgadas, las descomponemos en las partes: 4 pulgadas=$\frac{1}{3}$ de pie, y 1 pulgada=$\frac{1}{4}$ de 4 pulgadas, por lo que tomamos primero la tercera parte del valor de un pie, y en seguida la cuarta parte del valor de 4 pulgadas.

Debe observarse que las partes de la última subdivisión se estiman en fracciones comunes; y que para dividir estas fracciones se sigue el método de multiplicar su denominador por el divisor; así por ejemplo al concluir de tomar la tercera parte de $12^{\$}$—$1^{rl.}$—$11^{gs}$ $\frac{1}{3}$, decimos: tercera de 23 granos son 7 y sobran 2 granos que debemos sumar con $\frac{1}{3}$ de grano; 2 por 3 son 6 y 1, $\frac{7}{3}$; tercera de $\frac{7}{3}$ son $\frac{7}{9}$, que es lo que se escribe. Por último, estas fracciones se suman reduciéndolas á un común denominador buscando su menor múltiplo común.

Sucede á veces en la multiplicación de partes alícuotas, que una de éstas tiene un denominador muy grande, y en este caso se toma un producto auxiliar que se tiene cuidado de no sumar, como lo explicaremos en el ejemplo siguiente:

$425—6 rs.—4 tlacos.
35@ 10 lb. 2 onz. 2 adrs.

2125
1275

14875 \$.......	Valor de 35 @ á \$425
17—4 rs.....	id. á 4 rs=$\frac{1}{2}$ de \$ 35
8—6	id. á 2 id.
2—1—4 tls.	id. 4 tlacos=$\frac{1}{4}$ de \$ 8—6 rs.
14903—3—4....	Valor de 35 @ á 425 \$ 6 rs. 4 tlacos.
85—1—2$\frac{2}{5}$...$\frac{640}{1600}$	Valor de 5 lb.=$\frac{1}{5}$ de 425 \$ 6 rs. 4 tlacos.
85—1—2$\frac{2}{5}$...$\frac{640}{1600}$	Valor de 5 lb.
$\boxed{17—0—2\ \frac{2}{25}}$	Idem de 1 lb. *Producto auxiliar.*
2—1—0$\frac{52}{200}$..$\frac{416}{1600}$	Idem de 2 onz.=$\frac{1}{8}$ de \$17—0 rs. 2 $\frac{2}{25}$ tls.
$\boxed{1—0-4\frac{26}{200}}$	Idem de 1 onz. *Producto auxiliar.*
0—1—0$\frac{826}{1600}$..$\frac{826}{1600}$	Idem de 2 adrs.=$\frac{1}{8}$ de \$ 1—0—4 tls. $\frac{26}{200}$

\$15076—0^{rs} —1$\frac{922}{1600}$...$\frac{2522}{1600}=1+\frac{922}{1600}$

Después de haber determinado el producto parcial \$ 85—1 rl. 2 tls.$\frac{2}{5}$ valor de 5 libras, para determinar el de 2 onzas, como esta cantidad es $\frac{1}{40}$ de 5 libras, para evitar lo molesto que sería tomar á la memoria la 40 ava parte del anterior producto, se determina uno auxiliar—el de una libra—del cual ya es fácil deducir el valor de 2 onzas; pero se tiene cuidado de tachar el producto auxiliar para no sumarlo. Igualmente para deducir del valor de 2 onzas el de 2 adarmes, se toma el producto auxiliar de una onza, que también hemos señalado para no sumarlo.

La prueba de esta operación comunmente se hace verificando el resultado de un método por el otro; pero puede igualmente tomarse la mitad de un factor para obtenerse la mitad del producto si no ha habido error en la multiplicación ó en su prueba.

En la multiplicación de los complexos es preciso fijar cuál de los factores es el multiplicando para valuar los productos parciales y el total en la especie de unidades que les corresponde conforme á la naturaleza de la cuestión; pero si se transforman los denominados en quebrados ó en decimales, el valor abstracto del producto no se altera aun cuando se invierta el orden de los factores.

DIVISION DE LOS DENOMINADOS.

195.—Regla general.—*Para dividir un denominado por otro: 1°, se convierten el dividendo y el divisor en quebrados: 2°, se dividen estos quebrados; y 3°, se transforma el quebrado que resulta en denominado, valuándolo en la especie de unidades que deba expresar el cociente.*

Antes de dividir los quebrados, se abrevian cuando es posible.

Por ejemplo, se han pagado 845\$—4 rs.—2 tlacos por 105 marcos—6 onzas—4 ochavas—4 tomines de plata, y se quiere conocer el valor del marco.

La operación se ejecutará como sigue:

$$845^{\$}—4^{rs}—2^{tls.} \div 105^{mcos.}—6^{onz.}—4^{och.}—4^{toms.}$$

```
  845          105
    8            8
 6764          846
    8            8
54114         6772
                 6
             40636
```

$$\frac{\overset{27057}{\cancel{54114}}}{\underset{32}{\cancel{64}}} \div \frac{\overset{10159}{\cancel{40636}}}{\underset{96}{\cancel{384}}} = \frac{27057 \times \overset{\overset{3}{12}}{\cancel{96}}}{10159 \times \underset{\underset{1}{4}}{\cancel{32}}} = \frac{81171}{10159}\$ = 7^{\$}—7^{rs.}—7^{tls.} + \frac{3695}{10159}$$

```
 27057
     3
 81171 | 10159
 10058 | 7$—7rs.—7tls.
     8 |
 80464
  9351
 74808
  3695
```

196.—Distinguiremos en la división de denominados, *el caso en que siendo el dividendo de la especie que se busca en el cociente, el divisor es incomplexo.*

En este caso, la división se dispone como la de enteros y se comienzan á dividir las unidades de mayor especie del dividendo por el divisor; la resta se reduce á especie menor agregándole las de igual clase del dividendo, y el resultado se divide por el divisor, repitiéndose esta operación con la resta hasta llegar á la última subdivisión.

Por ejemplo: por una pieza de oro que pesa 125 marcos se han pagado 16974\$—3 rs.—3 tls., y se quiere determinar el valor del marco. La operación se dispone y ejecuta como sigue:

```
16974$—3rs.—3tls. | 125mcos.
  447             | 135$—6rs.—2tls. 113/125 valor del marco de oro.
   724
    99
     8
   795
    45
     8
   363
   113
```

La prueba de la división puede hacerse multiplicando el cociente por el divisor, y agregando la resta, el producto deberá ser igual al dividendo; ó bien, se dividen el dividendo y el divisor por un mismo número, y el nuevo cociente deberá ser igual al anterior.

Nota.—*Todas las operaciones de los números complexos, pueden ejecutarse convirtiéndolos préviamente en decimales.*

* (197).—Observaciones sobre el cálculo de los denominados.—Los números denominados ó complexos, tienen sus denominadores sobrentendidos lo mismo que los decimales; pero además de ser diferentes para cada especie de unidad, el denominador es variable de una á otra subdivisión, por lo cual los denominados vienen á ser reuniones de fracciones relativas unas á otras, cuyos denominadores es indispensable conocer de memoria para poder ejecutar las operaciones.

Para el cálculo de denominados, tenemos como operaciones fundamentales, la reducción de unidades de especie mayor á menor ó viceversa, y las conversiones de los complexos en quebrados y en decimales y recíprocamente.

La suma y la resta se ejecutan como en los enteros, por partes. La multiplicación y la división, por regla general, se ejecutan transformando préviamente los denominados en quebrados. La multiplicación también se ejecuta por partes, haciéndose uso de las alícuotas. Tanto en la multiplicación como en la división, importa conocer bien por la cuestión la especie del resultado que se busca para valuar en ella el quebrado obtenido, ó para señalar la especie de los productos parciales en la multiplicación por partes alícuotas.

Los resultados de las operaciones de los denominados son exactos, lo mismo que los de los quebrados, á diferencia de los de las decimales, que la mayor parte de las veces sólo son aproximados.

ELEVACION A POTENCIAS Y EXTRACCION DE RAICES.

198.—POTENCIA DE LOS NÚMEROS.—DEFINICIÓN.—*Se llama potencia de un número, el producto que resulta de multiplicarlo una ó varias veces por sí mismo.*—Por ejemplo, si $9=3\times3$, 9 será una potencia de 3; y si $27=3\times3\times3$, 27 será igualmente otra potencia de 3.

El grado de la potencia lo indica el número de factores iguales que forman el producto; así 9 es la segunda potencia, y 27 es la tercera potencia del número 3.

Multiplicando sucesivamente por sí mismos varias veces los números que representan las unidades, formaremos las segundas, terceras, etc., potencias de estos números cuyos resultados constan en la siguiente tabla.

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª potencia.
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

De estos números es útil saber de memoria los correspondientes á la 2ª y 3ª potencia.

A la 2ª *potencia* se le llama *cuadrado*, y á la 3ª *potencia*, *cubo*.

La elevación á una potencia se indica poniendo un poco arriba y á

la derecha de la cantidad un número más pequeño que sirve para expresar su grado, y se llama *exponente.*

Por ejemplo, 56 elevado á la 4ª potencia se escribe así: 56^4, siendo el número 4 el que indica el grado de ésta. La cantidad suele ponerse debajo de una raya ó dentro de un paréntesis así; $\overline{1087}^3$, ó $(1087)^3$.

DEFINICIÓN.—*Se llama exponente el número que indica cuántas veces una cantidad entra como factor en el producto.*

$$56^4=56\times56\times56\times56$$

REGLA.—*Para elevar una cantidad á una potencia, se multiplica por sí misma tantas veces como unidades tiene el exponente de la potencia menos una.* El número de factores es igual al exponente, y el de multiplicaciones es una unidad menos.

Cuando se trata de una potencia superior, se descompone, cuando es posible, el exponente en varios sumandos, iguales entre sí; se eleva sucesivamente la cantidad á las potencias indicadas por cada uno de los sumandos, y en seguida se multiplican entre sí los resultados obtenidos.

Por ejemplo, se quiere elevar el número 20 á la 13ª potencia. Como $13=4+4+4+1$, tendremos que

$$20^{13}=20^4\times20^4\times20^4\times20$$

y para obtener el primer factor 20^4, observaremos que es igual á $20^2\times20^2$, con lo cual se economizan algunas multiplicaciones y el resultado se obtiene con más facilidad.

La razón de esta regla es, que buscándose el valor de un producto en el que la cantidad 20 entre 13 veces como factor, lo mismo es formar ese producto por multiplicaciones sucesivas del mismo factor, que por multiplicaciones de resultados que contengan á 20 varias veces como factor. Por ejemplo:

$$20^5=20\times20\times20\times20\times20=(20\times20\times20)\times(20\times20)=20^3\times20^2$$

luego $$20^5=20^3\times20^2$$

Para elevar un quebrado á una potencia, se elevan por separado el numerador y el denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador

$$\left(\tfrac{2}{5}\right)^3=\tfrac{2}{5}\times\tfrac{2}{5}\times\tfrac{2}{5}=\frac{2\times2\times2}{5\times5\times5}=\frac{2^3}{5^3}=\tfrac{8}{125}$$

Conforme á lo que se explicó en el número (160), la potencia de un quebrado propio es menor que este quebrado; por esto, $\frac{8}{125}<\frac{2}{5}$.

Cuando se eleva una decimal ó un entero junto con decimales á una potencia, debe observarse que el número de decimales del resultado será igual al número de las que tiene la cantidad multiplicado por el exponente de la potencia. La razón de esto es, que en cada producto se separan tantas decimales como hay en ambos factores juntos (177).

Así, si se eleva 0'25 á la 2ª potencia, el resultado tendrá $2\times2=4$ cifras decimales. Si se eleva á la 3ª potencia el resultado tendrá 6 decimales, y si se eleva á la 5ª potencia, tendrá 10 decimales.

199.—Raíces y números inconmensurables.—Definición.—*Se llama raíz de una cantidad, el número que, multiplicado una ó varias veces por sí mismo, da por producto la cantidad propuesta.* Así, por ejemplo, 5 es la raíz cuadrada de 25, porque 5×5 produce 25. La raíz 3ª ó cúbica de 27 es 3, porque $3\times3\times3=27$.

En la tabla puesta al principio del párrafo anterior, los números que ocupan la primera columna, representan las raíces 2ª, 3ª y 4ª, etc., de los números puestos respectivamente en las columnas 2ª, 3ª y 4ª, etc.

La inspección de la tabla nos hace conocer, que la potencia de un número entero siempre es número entero; pero debemos advertir, que los números intermedios entre las potencias de dos números consecutivos, no tienen raíz exacta. Por ejemplo, el cuadrado de 5 es 25, el de 6, es 36, pues bien, la raíz de 30 será un número comprendido entre 5 y 6, la cual podrá obtenerse con cuanta aproximación sea necesaria, pero nunca será enteramente exacta, porque 5 más una fracción multiplicado por si mismo, da por producto un número mixto, y no un número entero como 30. Así como la división de dos números enteros cuando no es exacta, conduce á la formación de los números fraccionarios, del mismo modo la extracción de la raíz de un número que no es potencia de otro entero, conduce á la formación de una nueva especie de números que se llaman *inconmensurables ó irracionales*, porque no se pueden medir exactamente con la unidad, y porque la relación que existe entre el número y su raíz, no puede expresarse por la de dos números enteros. Para que un número entero sea una potencia cabal de otro, es necesario que, descompuesto en sus factores primos, cada uno de estos resulte elevado á la misma potencia.

Para representar la operación de la extracción de la raíz de una cantidad, se usa el signo radical $\sqrt{}$ colocando debajo de la línea horizontal la cantidad, y entre las ramas el grado de la raíz por medio de un número que se llama índice. Así:

$$\sqrt[6]{64}=2$$

Se lee, raíz 6ª de 64 igual á 2, y significa que 64 es el producto en que 2 entra 6 veces como factor, esto es:

$$64=2\times2\times2\times2\times2\times2$$

Para comprobar que un número es raíz de otro, bastará dividir este por la raíz, así como los cocientes que sucesivamente vayan resultando hasta obtener la unidad como último cociente. El número de divisiones determina el grado de la raíz.

La raíz de un quebrado se obtiene extrayendo la del numerador y la del denominador, como operación inversa de la ejecutada al elevarlo á una potencia.

$$\sqrt[3]{\tfrac{8}{125}}=\tfrac{2}{5}$$

La raíz de un entero junto con decimales, se extrae sacando primero la de los enteros y en seguida la de las decimales; teniendo cuidado de que el número de cifras decimales sea un múltiplo del índice del radical para lo que se agrega á la derecha de las decimales el número de ceros que es necesario.

CUADRADO Y RAIZ CUADRADA.

200.—Elevación de un número al cuadrado.—Definición.—*Se llama cuadrado de un número, el producto que resulta de multiplicarlo por sí mismo.* Por ejemplo, 64 es el cuadrado de 8, supuesto que $8\times8=64$.

La elevación de un número al cuadrado, se indica poniendo el exponente 2 arriba y á la derecha de la cantidad, la cual algunas veces se pone debajo de una raya y otras dentro de un paréntesis, de la manera siguiente:

$$25^2 \text{ ó } \overline{25}^2 \text{ ó } (25)^2=625$$

Para elevar un número al cuadrado, basta multiplicarlo por sí mismo.

Si el número es entero, su cuadrado será también número entero. Si el número es un quebrado, para obtener el cuadrado se elevará por separado el numerador y el denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador; en este caso, el resultado es quebrado, y además, es menor que el quebrado que se eleva al cuadrado, porque el producto de los quebrados propios es menor que cualquiera de los factores (160).

Si el número que se eleva es mixto, su cuadrado también lo será: y si está compuesto de enteros y decimales, el cuadrado constará en la parte decimal de un número de cifras decimales duplo de las de la cantidad. La razón de esto es, que siendo el cuadrado de un número el producto que resulta de multiplicarlo por sí mismo; y debiendo tener el producto de las decimales tantas cifras decimales como hay en ambos factores juntos, en nuestro caso, éstas serán un número doble de las que tenga la cantidad que se eleva al cuadrado.

Igual observación tiene que hacerse cuando la cantidad que se eleva al cuadrado sólo es decimal; el cuadrado consta de un número de cifras doble de las de la decimal, y su valor numérico es menor que el de la cantidad que se eleva al cuadrado. Como resumen de lo expuesto pondremos los siguientes ejemplos:

$25^2=625$	número	entero mayor que 25.
$(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$	"	quebrado menor que $\frac{3}{4}$.
$(2+\frac{3}{4})^2=7+\frac{9}{16}$	"	mixto mayor que $2+\frac{3}{4}$
$(0'04)^2=0'0016$	"	decimal, con doble número de cifras decimales y menor que 0'04.
$(3'04)^2=9'2416$	"	mixto con doble número de cifras decimales y mayor que 3'04.

201.—Elevación al cuadrado de un número compuesto de decenas y de unidades.—Si queremos elevar al cuadrado el número $36=30+6$, su cuadrado será igual al producto que resulte de multiplicar $30+6$ por $30+6$ de la manera siguiente:

$$\begin{array}{lll} & 30+6 & \\ & 30+6 & \\ \hline 900=30\times30 & & \text{Cuadrado de las decenas} \\ 180=30\times\ 6 & \rbrace & \text{Dos veces decenas por unidades.} \\ 180=30\times\ 6 & & \\ 36=\ 6\times\ 6 & & \text{Cuadrado de las unidades.} \\ \hline 1296=30^2+2\times(30\times6)+6^2 & & \\ (d+u)^2=d^2+2\times(d\times u)+u^2 & & \end{array}$$

Al multiplicar 30 por 30, formamos el cuadrado de las decenas; al multiplicar 30 por 6, obtenemos un producto de decenas por unidades; al multiplicar 6 por 30, obtenemos otro producto de decenas por unida-

des, igual al anterior, y al multiplicar 6 por 6 formamos el cuadrado de las unidades.

En consecuencia, *el cuadrado de todo número compuesto de decenas y de unidades, consta de tres partidas: 1ª cuadrado de las decenas; 2ª doble producto de las decenas por las unidades, y 3ª cuadrado de las unidades.* *

El objeto con que se determinan las partidas de que se compone el cuadrado de un número, es el de tener un procedimiento general para determinar la raíz de un número y para poderla aproximar.

Debe observarse: 1°, que decenas cuadradas producen centenas, supuesto que estando terminado cada uno de los factores en un cero, el producto debe llevar dos ceros (71, 5° caso) esto es, debe expresar centenas; 2°, el doble producto de decenas por unidades, debe expresar decenas, supuesto que uno de los factores, las decenas, termina en un cero; y 3°, la tercera partida, el cuadrado de las unidades, siempre tiene unidades aunque conste de dos ó más guarismos.

La unidad elevada al cuadrado ó á cualquiera potencia, produce la unidad, y como $10^2=100$, resulta que los cuadrados de los números compuestos de un solo guarismo, esto es, menores que 10, están comprendidos entre 1 y 100. Como $100^2=10000$, resulta que los cuadrados de los números comprendidos entre 10 y 100, esto es, compuestos de dos cifras, estarán comprendidos entre 100 y 10000, tendrán 3 ó 4 cifras. Como $1000^2=1000000$, resulta que los cuadrados de los números de 3 cifras,

* La demostración de este principio, así como la de todos aquellos que se refieren más bien á la relación que al valor de las cantidades, se puede dar mejor haciendo uso de los signos algebráicos. Considerando todo número compuesto de decenas y unidades, si representamos por la letra d las decenas y por u las unidades, multiplicando $(d+u)$ por $(d+u)$, tendremos los productos parciales de que se compondrá el cuadrado de cualquier número formado de decenas y unidades. Ejecutando la multiplicación, tendremos:

$$\begin{array}{r} d+u \\ d+u \\ \hline d^2+d\times u+d\times u+u^2=d^2+2d\times u+u^2 \end{array}$$

luego

$$(d+u)^2=d^2+2d\times u+u^2$$

que son las tres partidas de que consta el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades.

Si en vez de descomponer un número en decenas y unidades lo descomponemos en dos partes, y representamos por d la primera parte y por u la segunda, multiplicándolo por sí mismo, generalizaremos el principio demostrado, diciendo que el cuadrado de un número consta: del cuadrado de la primera parte, más el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda. Por ejemplo:

$$(4+5)^2=4^2+2.4\times5+5^2$$
$$(4+1)^2=4^2+2.4\times1+1^2$$
$$(4+\tfrac{3}{8})^2=4^2+2.4\times\tfrac{3}{8}+(\tfrac{3}{8})^2$$

tendrán 5 ó 6 guarismos, y en general, conforme á la observación hecha al final del número 68, el cuadrado de un número cualquiera constará de un número doble de cifras de las que él tiene ó de una menos.

202.— Raíz cuadrada.—Definición. — *Se llama raíz cuadrada de un número á la cantidad que multiplicada por sí misma, produce el número propuesto.*

Por ejemplo, la raíz cuadrada de 81 es 9, supuesto que $9 \times 9 = 81$.

$\sqrt{7298}$: se lee, raíz cuadrada de 7,298.

203.—Ejemplo para extraer la raíz cuadrada.—El método natural para encontrar una raíz cuadrada, sería ir formando los productos sucesivos de todos los números, unidad por unidad, hasta encontrar el cuadrado del número que más se aproximara al propuesto; pero además de lo penoso de este método, sería ineficaz para las aproximaciones, por lo cual, una vez determinadas las partidas de que consta el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades, se prefiere buscar un número, la suma de cuyas partidas se aproxime más al número dado.

Si se trata de conocer la raíz cuadrada de la cantidad 55298, la operación se dispondrá y ejecutará como sigue:

	$\sqrt{5,52,98}$	235	$\sqrt{5,52,98}$	235
2^2..............	—4	43	1 5,2	43
	15,2	465	239,8	465
3×43..........	—12 9		7 3	
	2 39,8			
5×465..........	—2 32 5			
	7 3			

1ª resta................ $23 < 2 \times 23$

2ª resta................ $73 < 2 \times 235$

Dividida la cantidad en períodos de dos en dos guarismos, se busca el mayor cuadrado contenido en 5, que es 4, cuya raíz es 2. El cuadrado de este número, restado de 5 da 1 por resta, á cuyo lado bajamos el período 52. Separamos el último guarismo 2; duplicamos la raíz y escribimos este duplo, 4, debajo de ella; dividimos 15 entre 4, y el cociente 3 lo escribimos al lado del 4 y de la raíz 2. El cociente 3 se multiplica por 43, cantidad formada con el duplo de las decenas de la raíz y sus unidades, y el producto 129 se resta de 152. Al lado de la resta 23, bajamos el período 98: separando el guarismo 8 dividimos 239

entre 46, duplo de la raíz; y el cociente 5 lo ponemos al lado de 23 y de 46. En seguida multiplicamos las 5 unidades de la raíz por 465, número formado con el duplo de 23 (decenas de la raíz), más 5 unidades y el producto lo restamos de 2398, quedando la resta 73.

Este resultado nos indica que la raíz cuadrada de 55298 no es un número exacto, estando comprendida entre 235 y 236. La extracción de la raíz cuadrada, pocas veces conduce á un resultado exacto, y el verdadero valor en nuestro ejemplo, debe concebirse así:

$$55298 = 235^2 + 73$$

Esta resta 73 es el exceso de 55298 sobre el cuadrado de 235.

Por cada período que se baja debe obtenerse un guarismo en la raíz ó cero. Además, la resta no debe ser mayor que el duplo de la raíz hallada. En caso contrario, es seguro que el último guarismo de la raíz es menor de lo que debía ser.

204.—Regla.—*Para extraer la raíz cuadrada de un número, se divide éste en períodos de dos guarismos contando de derecha á izquierda; se busca la raíz del mayor cuadrado contenido en el período de la izquierda, que podrá constar de uno ó de dos guarismos; se escribe ésta raíz á la derecha de la cantidad separándola por una línea vertical como en la división; se forma el cuadrado de la raíz hallada, y se resta del primer período de la izquierda; al lado de la resta se baja el período siguiente; se separa el último guarismo de la derecha; se duplica la raíz y por el resultado, que se escribe debajo de ella, se divide el número separado á la izquierda en la cantidad formada con la resta y el segundo período, poniendo el cociente al lado de la raíz y à la derecha del duplo de las decenas de la raíz; las unidades de la raíz se multiplican por la cantidad así formada, y se resta el producto de la cantidad formada con la resta y el período que se bajó á su derecha. Si el guarismo de las unidades es mayor que el verdadero. la resta no podrá efectuarse, y si es menor, la resta resultará mayor que el duplo de la raíz. Al lado de la resta obtenida se baja el período siguiente: se separa el último guarismo, y la cantidad de la izquierda se divide por el duplo de la raíz hallada, poniendo al lado de esta el cociente; este cociente se multiplica por cantidad formada con el duplo de las decenas de la raíz y las unidades, y el producto se resta de la cantidad formada con la resta y el período bajado á su lado. Así se continúa la operación, y si la cantidad es un cuadrado completo, la última resta será 0. Cada período que se baja produce un guarismo ó cero en la raíz.*

205.—Demostración de la regla —Refiriéndonos á un ejemplo, haremos raciocinios generales aplicables á cualquiera otro. Hemos visto que el cuadrado de un número se compone de tres partidas: 1ª, el cuadrado de las decenas; 2ª, doble producto de decenas por unidades, y 3ª, cuadrado de las unidades. En consecuencia, si de una cantidad restamos sucesivamente estas tres partidas del cuadrado del número que expresa la raíz, habremos quitado el cuadrado de la raíz. Para más facilitar la inteligencia de esta demostración, elevamos al cuadrado por sus partidas el número $73=70+3$. La primera partida expresa 49 centenas; la segunda expresa 42 decenas y la tercera 9 unidades. Vamos á extraer ahora la raíz cuadrada del número 5329, dando la razón de todo lo prescrito en la regla general.

$$\begin{aligned} d^2 &= 4900 \\ 2d \times u &= 420 \\ u^2 &= 9 \\ \hline 73^2 &= 5329 \end{aligned}$$

$\sqrt{53,29}$	73
-49	143
42,9	
$-42,9$	
00 0	

Como $10^2=100$, en el hecho de tener el número 5329 más de dos guarismos, su raíz constará de decenas y unidades, y el número 5329 contendrá las tres partidas dichas. Vamos á buscar las decenas de la raíz valiéndonos de la primera partida: *decenas cuadradas*. Pero como decenas cuadradas producen centenas, no las encontraremos en el 29, que representa decenas y unidades, razón por la cual separaremos este período de dos cifras. El mayor cuadrado de un número dígito contenido en 53 es 49, cuya raíz 7 será el valor de las decenas de la raíz, y conocidas éstas, formaremos la primera partida del cuadrado, $70^2=4900$, y la restaremos de 5329, ó simplemente 49 de 53 centenas, quedando la resta de 4 centenas, á cuyo lado se baja el período 29. En el número 429 debemos tener las dos partidas restantes, y para encontrar las unidades nos valemos de la segunda: *doble producto de las decenas por las unidades;* y como el valor de esta partida expresará decenas, no la encontraremos en el 9 que representa unidades, y por esta razón lo separaremos; 42 será, pues, el producto de dos factores, siendo uno, el duplo de las decenas y el otro las unidades; y como si el producto de dos factores se divide por uno de ellos, el cociente será el otro factor (75), resulta que dividiendo 42 entre 14, duplo de las decenas, el cociente 3 nos expresará las unidades de la raíz. Una vez encontradas éstas, formamos las dos partidas restantes, duplo de las decenas multiplicado por las unidades, igual á 420, y cuadrado de las unidades, igual á 9, cuya suma se resta de 429. Las partidas del cuadrado nos han servido para encontrar las partes de la raíz, y una vez conocidas éstas, hemos restado del número propuesto las partidas del cuadrado de la raíz, luego habremos quitado el cuadrado de la raíz. Como en el ejemplo propuesto no queda resta, resulta que $\sqrt{5329}=73$.

Decíamos que *la resta no debe ser mayor que el duplo de la raíz.* La razón de esto es, que si conocemos el cuadrado de un número, por ejemplo, el de 25, y deseamos encontrar el de $26=(25+1)$, lo obtendremos formando las partidas de sus dos partes, que son:

$$(25+1)^2=25^2+2\times25+1.$$

En consecuencia, si el cuadrado de un número una unidad mayor que otro, es igual al cuadrado de éste, más el doble de este número, más 1, es claro que cuando la resta sea mayor que el duplo de la raíz hallada, las unidades de ésta podrán aumentarse con una unidad, y debe repetirse la operación.

206.—Aproximación de la raíz cuadrada.—*Cuando el resultado de la raíz cuadrada de un número entero no es exacto, se aproxima por decimales, agregando sucesivamente á cada resta dos ceros por cada decimal que se quiere obtener en la raíz, y se continúa la operación hasta alcanzar la aproximación apetecida, teniendo cuidado de separar con una coma la parte entera de la decimal.*

Sea, por ejemplo, extraer la raíz cuadrada á 698.

$\sqrt{6,98}$	26‘41
2 9,8	46
2 2‘0,0	52‘4
1 040,0	52‘81
5119	

Ejecutando la operación como se ha dicho, encontraremos la raíz 26 unidades y la resta 22. Para encontrar las décimas de la raíz, agregamos dos ceros al lado de 22, ponemos la coma después de la raíz 26, y procediendo como antes, encontramos 4 décimas en la raíz, y 104 centésimas de resta. A ésta agregamos dos ceros y encontramos 1 centésima en la raíz y 0‘5119 por resta.

Demostración.—Cuando se agregan dos ceros á la derecha de cada resta, no se hace sino reducir unidades á centésimas, centésimas á diezmilésimas, etc., y se agregan sucesivamente *dos* ceros, porque para que haya décimas en la raíz, es preciso que haya centésimas en el cuadrado; para que haya centésimas en la raíz es preciso que haya diezmilésimas en el cuadrado, etc. (200), y en general por cada cifra decimal de la raíz debe haber dos en el cuadrado.

Regla.—*Para determinar el valor de la resta, cuando se ha aproximado la raíz cuadrada por decimales, se separarán, contando de derecha á izquierda, doble número de cifras decimales de las que tenga la raíz.*

En el último ejemplo, la resta es 0‘5119; habiéndose omitido escribir la coma que separa las unidades de las decimales para no hacer confusa la operación.

207.—Extracción de la raíz cuadrada de las decimales.—Ocurren dos casos: cuando hay enteros juntos con decimales, y cuando sólo hay decimales.

1º *Cuando hay enteros con decimales, antes de comenzar la operación se examina si el número de cifras decimales es ó no par; y cuando no lo es,* *se agrega á la derecha un cero. En seguida se ejecuta la operación conforme á la regla general (204), teniendo cuidado de poner la coma de separación entre los enteros y las decimales en la raíz, al bajar el primer período de cifras decimales.*

Sea como ejemplo extraer la $\sqrt{235'273}$.

Comenzamos por agregar un cero á la derecha de las decimales para que éstas sean pares, y luego ejecutamos la operación por la regla general, teniendo cuidado de distinguir en la raíz las decimales de los enteros.

Demostración.—El valor del número cuya raíz debemos obtener, no se altera agregándole un cero á la derecha, (168—3°); y es necesario agregar este cero porque conforme á la regla de la multiplicación, cuando se eleva al cuadrado un número que tiene decimales, es indispensable que el producto conste de un número par de decimales; luego cuando esta condición no esté satisfecha tendremos que comenzar por cumplir con ella para poder obtener en la raíz una decimal por cada período del cuadrado.

$\sqrt{2,3\,5'27,30}$	15'33
1 3,5	25
1 02,7	30'3
11 83,0	30'63
2 64 1	

2° Caso.—*Cuando solo hay decimales, se hace que el número de éstas sea par, y con este objeto se agrega un cero á la derecha cuando sea necesario. Se pone en la raíz 0 como raíz de la parte entera, una coma, y en seguida se extrae la raíz de las decimales como si fueran enteros.*

Por ejemplo,

$\sqrt{0'87,50}$	0'93
6 5,0	0'183
1 0 1	

$$0'875=(0'93)^2+0'0101$$

Demostración.—Como la raíz de cero unidades es cero, por eso ponemos cero en la parte de los enteros de la raíz y como por cada cifra decimal que haya en la raíz debe haber dos cifras en el cuadrado, por eso hacemos que el número de cifras decimales sea par, agregando un cero á la derecha, lo cual no altera el valor de la decimal.

Cuando la parte decimal sea una fracción periódica, en lugar de agregar ceros, tanto para hacer que las cifras decimales sean pares, como para aproximar la raíz, se agregarán las cifras correspondientes del período.

La prueba de la raíz cuadrada se ejecuta elevando al cuadrado la raíz encontrada, y agregando al producto la resta, debe obtenerse el número propuesto. Operación que se facilita reduciendo las cantidades á unidades simples.

208.—Extracción de la raíz cuadrada de los quebrados.—En la ejecución de esta operación se presentan tres casos: 1°, *cuando los dos términos del quebrado tienen raíz exacta;* 2°, *cuando solo uno de sus términos tiene raíz exacta;* y 3°, *cuando ni el numerador ni el denominador tienen raíz exacta.*

En el *primer caso* se extrae la raíz del numerador y la del denominador separadamente, y el quebrado formado con estas raíces será la raíz del quebrado propuesto, una vez que para elevar un quebrado al cuadrado se elevan separadamente su numerador y su denominador.

Por ejemplo, $\sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{4}{7}$

Segundo caso.—*Cuando uno solo de los términos del quebrado tiene raíz exacta,* se le extrae exacta al que la tenga y aproximada al otro término, con lo cual se obtiene un quebrado, uno de cuyos términos es entero y el otro se compone de enteros y decimales. A este quebrado se le da la forma común agregando al término entero tantos ceros como cifras decimales tenga el otro, suprimiendo en seguida la coma y simplificándolo cuanto sea posible.

Por ejemplo: $\sqrt{\frac{16}{58}}=\frac{4}{7,61}=\frac{400}{761}$

$\sqrt{58}$	7'61
90,0	14'6
2 40,0	15'21
87 9	

En este ejemplo, como el denominador es aproximado, esto es, menor que el verdadero, el quebrado $\frac{400}{761}$ es mayor que la raíz exacta de $\frac{16}{58}$. Cuando el numerador no tenga raíz exacta, el resultado será menor que el verdadero.

Tercer caso.—*Cuando ninguno de los dos términos del quebrado tiene raíz exacta,* se reduce éste al segundo caso multiplicando ambos términos por el numerador ó por el denominador, y en seguida se ejecuta la regla antes dada.

Si se quiere extraer la raíz cuadrada de $\frac{5}{7}$, cuyos términos no son ni uno ni otro cuadrados perfectos, multiplicaremos por el denominador sus dos términos, lo cual no altera su valor y diremos:

$$\sqrt{\frac{5}{7}}=\sqrt{\frac{35}{49}}=\frac{5'91}{7}=\frac{591}{700}$$

$\sqrt{35}$	5'91
10'00	10'9
190,0	11'81
71 9	

Además de la forma de quebrado común puede darse á la raíz de los quebrados la forma decimal, para lo cual se convierte el quebrado obtenido en decimal.

Así: $$\sqrt{\frac{5}{7}}=\frac{591}{700}=0'844$$

Por último, *la raíz cuadrada de un quebrado puede obtenerse convirtiéndolo préviamente en decimal y extrayendo á ésta la raíz conforme á la regla dada* (207), *teniendo cuidado de que el número de decimales sea par.*

Por ejemplo: $\sqrt{\frac{5}{7}}=\sqrt{0'7142}=0'84$

50	7	$\sqrt{0'71,42}$	0'84
10	0'7142	7 42	1'64
30		86	
20			
6			

La raíz cuadrada de un quebrado propio ó de una cantidad decimal sin enteros, es mayor que el quebrado ó que la decimal, supuesto que conforme á lo explicado en los números 160 y 177 cualquiera de los factores es mayor que el producto, y aquí la raíz es factor del quebrado ó de la decimal dada.

Para extraer la raíz cuadrada de un número mixto se transformará préviamente en quebrado impropio ó en enteros con decimales, y en seguida se extraerá la raíz del quebrado impropio (208) *ó la de los enteros con decimales* (207).

Para extraer la raíz cuadrada de un número denominado, se convertirá préviamente en decimal, y en esta forma se le extraerá la raíz.

CUBO Y RAIZ CUBICA.

209.—Elevación de un número al cubo.—Definición.—*Se llama cubo ó tercera potencia de un número, el producto que resulta de multiplicarlo por su cuadrado.* En consecuencia, el cubo de un número es un producto formado por tres factores iguales. Por ejemplo, 125 es el cubo de 5, supuesto que 5×5^2 ó $5\times5\times5=125$.

La elevación de un número al cubo, se indica poniendo el exponente 3 á la derecha y arriba de la cantidad, la cual suele colocarse debajo de una raya ó dentro de un paréntesis.

$$15,^3 \text{ ó } \overline{15},^3 \text{ ó } (15)^3=3375$$

se lee: 15 elevado al cubo, igual á 3375.

Regla.—*Un número se eleva al cubo multiplicándolo por su cuadrado, ó dos veces sucesivas por sí mismo.*

Cuando el número es entero, también lo será su cubo. Si el número es quebrado, para obtener su cubo habrá que elevar separadamente su numerador y su denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador. En este caso el cubo es quebrado y menor que el propuesto, porque el producto de la multiplicación de los quebrados propios es menor que cualquiera de sus factores. (160).

Si el número que se eleva al cubo consta de enteros y decimales, su cubo será un número mixto compuesto en la parte decimal de un número de cifras triple de las que tenga el propuesto, porque el cuadrado contiene un número doble, y porque en el producto del cuadrado por el número propuesto se deben separar tantas decimales como hay en ambos factores juntos.

Cuando la cantidad que se eleva al cubo solo es decimal, su cubo constará de un número triple de cifras decimales, y su valor será menor que el de la decimal propuesta (177).

Como resumen de lo expuesto pondremos los siguientes ejemplos:

$15^3=3375$	número entero mayor que 15.
$(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64}$	» quebrado menor que $\frac{3}{4}$.
$(2+\frac{3}{5})^3=17+\frac{72}{125}$	» mixto, mayor que $2+\frac{3}{5}$.
$(0'05)^3=0'000125$	» decimal con triple número de cifras decimales y menor que 0'05.
$(2'05)^3=8,615125$	» mixto, con triple número de cifras decimales y mayor que 2'05.

210.—Partidas de que consta el cubo de un número compuesto de decenas y unidades.—Si queremos elevar al cubo el número $75=70+5$ tendremos que multiplicarlo por su cuadrado, esto es:

$$(70+5)^3=(70+5)^2\times(70+5)$$

pero como $$(70+5)^2=70^2+2\times(70+5)+5^2 \quad (201)$$

tendremos que multiplicar las tres partes del cuadrado, primero por 70 y luego por 5 para formar el cubo de $70+5$; ejecutando esta multiplicación, tendremos:

$$\begin{array}{ll}
 & (70+5)^2=70^2+2\times70\times5+5^2 \\
\text{por } (70+5)= & 70+5 \\
\hline
\text{producto por } 70= & 70^3+2\times70^2\times5+70\times5^2 \\
\text{id. por } 5= & 70^2\times5+2\times70\times5^2+5^3 \\
\hline
\text{sumando } (70+5)^3= & 70^3+3\times70^2\times5+3\times70\times5^2+5^3 \\
 & (d+u)^3=d^3+3\times d^2\times u+3\times d\times u^2+u^3
\end{array}$$

pero como 70 representa las decenas, y 5 las unidades del número 75, inferimos: *que el cubo de un número compuesto de decenas y unidades, consta de cuatro partidas: 1ª cubo de las decenas: 2ª, tres veces decenas cuadradas multiplicadas por las unidades; 3ª tres veces decenas multiplicadas por las unidades cuadradas; y 4ª, cubo de las unidades.* *

Se distinguen las partidas de que está formado el cubo de un número compuesto de decenas y unidades, con el objeto de determinar un procedimiento general para extraer la raíz cúbica de un número, y para poderla aproximar.

Debe observarse: 1º, que decenas cúbicas producen millares, porque al multiplicar el cuadrado de las decenas que expresa centenas, por decenas, que terminan en un cero, el producto ó cubo terminará en tres ceros; 2ª, la segunda partida expresa centenas, porque decenas cuadradas producen centenas; 3º, la tercera partida compuesta de decenas multiplicadas por tres veces las unidades cuadradas, expresa decenas; y 4º, el cubo de las unidades, siempre tiene unidades simples, aun cuando conste de más de una cifra.

Como $1^3=1$ y $10^3=1000$, el cubo de las unidades constará de una, dos ó tres cifras, pero no de más de tres. Como $10^3=1000$ y $100^3=1000000$, el cubo de los números comprendidos entre 10 y 100, tendrá

* Este principio puede demostrarse de una manera general, haciendo uso de los signos del álgebra. Considerando compuesto un número de decenas y unidades si se representan por d las decenas y por u las unidades, multiplicando $(d+u)^2$ por $(d+u)$, obtendremos las partidas de que está formado el cubo de cualquier número compuesto de decenas y unidades, y para esto ejecutaremos la siguiente operación:

$$(d+u)^3=(d+u)^2\times(d+u)=(d^2+2d\times u+u^2)\times(d+u).$$

ejecutando la multiplicación de las partidas del cuadrado por $(d+u)$:

$$\begin{array}{ll}
(d+u)^2= & d^2+2d\times u+u^2 \\
\underline{(d+u)} & \underline{\qquad d+u \qquad} \\
 & d^3+2d^2\times u+d\times u^2 \\
 & \underline{\quad +\ d^2\times u+2d\times u^2+u^3} \\
(d+u)^3= & d^3+3d^2\times u+3d\times u^2+u^3
\end{array}$$

resultado que demuestra la verdad del principio.

Si descomponemos un número en sus dos partes y representamos por d su primera parte y por u la segunda, generalizaremos el principio demostrado, diciendo que, el cubo de un número consta: del cubo de la primera parte, más tres veces el cuadrado de la primera por la segunda, más tres veces la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda parte.

Por ejemplo

$$(4+5)^3=4^3+3.4^2\times5+3.4\times5^2+5^3$$
$$(4+1)^3=4^3+3.4^2\times1+3.4\times1^2+1^3$$
$$(4+\tfrac{5}{8})=4^3+3.4^2\times\tfrac{5}{8}+3.4\times(\tfrac{5}{8})^2+(\tfrac{5}{8})^3$$

más de 3 y menos de 7 guarismos; y en general, el cubo de un número constará de triple número de guarismos que los suyos, de uno ó de dos menos.

211.—Raíz cúbica.—Definición.—*Se llama raíz cúbica de un número, aquel que multiplicado por su cuadrado produce el propuesto.*

Así, supuesto que $4\times4^2=64$, 4 será la raíz cúbica de 64.

La raíz cúbica de una cantidad se indica poniéndola debajo del signo radical con el número 3 entre las ramas del radical, y á este número se llama índice de la raíz: $\sqrt[3]{872}$, se lee: raíz cúbica de 872.

212.—Ejemplo para extraer la raíz cúbica.—Para ejecutar esta operación, nos valemos de las cuatro partidas del cubo, determinando las partes de la raíz por medio de ellas.

Se quiere determinar la raíz cúbica de 22873456. La operación se dispondrá y ejecutará como sigue:

$$\begin{array}{rr|ll}
 & \sqrt[3]{22,873,456} & 283 & \\
2^3= & \underline{8} & 12\ldots\ldots & =3.2^2 \\
 & \underline{148,73} & 2352 & =3.(28)^2 \\
3.(20)^2\times8= & 96\,00 & & \\
3.(20)\times8^2= & 38\,40 & & \\
8^3= & \underline{5\,12} & & \\
 & \underline{139\,52} & & \\
 & \underline{9\,214,56} & & \\
3.(280)^2\times3= & 70\,56\,00 & & \\
3.(280)\times3^2= & 75\,60 & & \\
3^3= & \underline{27} & & \\
 & \underline{7131\,87} & & \\
 & 2082\,69 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
28 \\
\underline{28} \\
224 \\
\underline{56\ } \\
784 \\
\underline{3} \\
\underline{2352}
\end{array}$$

$$3\times(28)^2=2352$$
$$3\times28\ =\ \underline{\ \ 84}$$

La resta....... $921\quad<2436+1$

Resulta que: $22873456=(283)^3+208269$

Dividida la cantidad en períodos de á tres guarismos, se ve que el mayor cubo contenido en el período 22 de la izquierda es 8, cuya raíz es

2: restando el cubo de la raíz de 22, se obtiene 14 por resta á cuyo lado se baja el período 873; se separan las decenas y unidades; se cuadra y triplica la raíz 2 escribiendo el resultado 12 debajo de ella: se dividen los guarismos 148 separados á la izquierda de la cantidad 14873 por 12, triple del cuadrado de las decenas de la raíz, y aunque el cociente es 12, como éste sólo debe constar de unidades, ponemos 8 por unidades. Se forman las tres últimas partidas del cubo, y la suma 13952, se resta de 14873 obteniéndose la resta 921. Si el guarismo 8 de las unidades hubiera sido *mayor* que el verdadero, la suma de las tres partidas habría resultado mayor que 14873; y si el guarismo 8 de las unidades de la raíz hubiera sido *menor* que el verdadero, la resta 921 habría resultado mayor que tres veces 28^2 más tres veces 28, esto es, debe obtenerse:

$$921<3\times 28^2+3\times 28+1 \text{ ó } 921<2436+1.$$

Al lado de la resta 921 se baja el período 456: se separan las decenas y unidades, se cuadra y triplica la raíz 28, se divide 9214 por 2352 triple del cuadrado de la raíz hallada, y el cociente 3 se pone como unidades: se forman las tres últimas partidas del cubo, y restando su suma 713187 de 921456, se obtiene la resta 208269, que es el exceso que tiene el número propuesto sobre el cubo de 283.

213.—Regla.—*Para extraer la raíz cúbica de un número, se divide en períodos de á tres cifras contando de derecha á izquierda, pudiendo constar el último de la izquierda de uno, dos ó tres guarismos; se busca la raíz del mayor cubo contenido en el período de la izquierda, y se escribe á la derecha de la cantidad, separándola por una raya vertical como en la división; se forma el cubo de la raíz hallada, y se resta del primer período de la izquierda; al lado de la resta se baja el período siguiente: se separan los dos guarismos de la derecha, se cuadra y triplica la raíz hallada, y por el resultado, que se escribe debajo de la raíz, se divide el número separado á la izquierda en la cantidad formada con la resta y el segundo período, poniendo el cociente como unidades al lado del guarismo de la raíz: una vez encontradas las decenas y unidades de la raíz se forman con ellas las tres partidas restantes del cubo, que son: tres veces decenas cuadradas multiplicadas por las unidades; tres veces decenas por el cuadrado de las unidades, y cubo de las unidades; la suma de estas tres partidas se resta de la cantidad formada con la primera resta y el período bajado á su lado. Si el guarismo de las unidades es mayor que el verdadero, la resta no podrá ejecutarse; y si es menor, la resta será mayor que la suma del triple del cuadrado de la raíz, más tres veces esta raíz. Al lado de la resta se baja el período siguiente: se separan los dos últimos guarismos, se cuadra y triplica la raíz hallada, y por el resultado, que se escribe debajo de la raíz, se divide el número separado á la izquierda en la cantidad formada con la resta y el período bajado á su lado: el cociente se pone como unidades de la raíz: se forman las tres últimas partidas del cubo, y su suma se resta de la cantidad formada con la última resta y el período bajado á su lado; y así se continúa la operación hasta el último período, quedando 0 por resta cuando la cantidad es un cubo perfecto. Por cada período que se baja se pone 0 ó una cifra significativa en la raíz.*

214.—Demostración de la regla para extraer la raíz cúbica.—Refiriéndonos á un ejemplo, haremos raciocinios generales aplicables á cualquier otro. Supuesto que el cubo de un número consta de cuatro partidas, 1ª, el cubo de las decenas; 2ª, tres veces el cuadrado de las decenas por las unidades; 3ª, tres veces las decenas por el cuadrado de las unidades; y 4ª, el cubo de las unidades, si de una cantidad restamos sucesivamente estas cuatro partidas del número que expresa la raíz, habremos quitado el cubo de la raíz. Aclararemos la demostración comenzando por elevar al cubo por sus partidas el número $64=60+4$.

$$\begin{array}{rr} d^3= & 216000 \\ 3\,d^2\times u= & 43200 \\ 3\,d\times u^2= & 2880 \\ u^3= & 64 \\ \hline & 262144 \end{array}$$

La primera partida expresa millares; la segunda, por estar formada del cuadrado de las decenas, expresa centenas: la tercera expresa decenas, y la cuarta indica unidades. Vamos á extraer la raíz cúbica á 262144 explicando el fundamento de todas las partes de la regla.

$$\begin{array}{rr|l} & \sqrt[3]{262,144} & 64 \\ d^3=60^3= & 216 & 108 \\ \hline & 461,44 & \\ 3\,d^2\times u=3.60^2\times 4= & 432\,00 & \\ 3\,d\times u^2=3.60\times 16= & 28\,80 & \\ u^3=\quad 4^3= & 64 & \\ \hline & 461\,44 & \\ \hline & 00\,00 & \end{array}$$

Como $10^3=1000$, en el hecho de tener el número 262144 más de tres guarismos, su raíz cúbica constará de decenas y de unidades, y el número 262144 estará compuesto de las partidas de la raíz. Para encontrar las decenas de la raíz nos valemos de la primera partida, pero como decenas cúbicas producen millares, no la encontraremos en el período compuesto de centenas, decenas y unidades, y por esta razón separamos las tres cifras de la derecha. El mayor cubo de un número entero contenido en 262, es 216 cuya raíz cúbica 6 expresará las decenas de la raíz. Formaremos la primera partida elevando 6 decenas al cubo; y restaremos 216 de 262 millares. Al lado de la resta 46 bajamos el período 144 unidades, y en la resta 46144, deberemos encontrar las tres partidas restantes del cubo. Para encontrar las unidades nos valemos de la segunda partida formada del producto del *triple del cuadrado de las decenas* multiplicado *por las unidades*, y como el valor de esta partida expresa centenas, no la encontraremos en las decenas ni en las unidades, y por esta razón separamos las dos últimas cifras 44; la cantidad 461 centenas podrá contener las centenas procedentes de la tercera y cuarta partida, pero principalmente estará formada de la segunda partida, esto es, del producto del *triple del cuadrado de las decenas multiplicado por las unidades*, y como si el producto de dos factores se divide por uno de ellos, el cociente será el otro factor, dividiendo 461 centenas por 108, triple del cuadrado de 6 decenas, el cociente 4 nos expresará las unidades de la raíz. *Este cociente generalmente es mayor que el verdadero á causa de las centenas que provienen de las otras partidas, por lo que se procede por tanteos disminuyendo el cociente hallado.*

Encontradas las decenas y las unidades de la raíz se forman las tres últimas partidas del cubo y su suma se resta de 46144. Las partidas de que está compuesto el cubo de un número, que consta de decenas y unidades, nos han servido para encontrar las partes de la raíz y como después de encontradas hemos restado de la cantidad las partidas del cubo de la raíz, habremos restado de la cantidad propuesta el cubo de la raíz.

Cuando el cociente no es menor que el verdadero, decimos que la *resta debe ser menor que la suma del triple del cuadrado de la raíz, más el triple de la raíz, más* 1; porque si conocido el cubo de un número 64, por ejemplo, determinamos el cubo de 64+1 que es,

$$(64+1)^3=64^3+3.64^2+3.64+1$$

veremos que el cubo de un número una unidad mayor excede al cubo del primero *tres veces su cuadrado, más tres veces el número, más la unidad.*

215.—Aproximación de la raíz cúbica.—*Cuando al concluir de extraer la raíz cúbica de un número, queda una resta y se quiere aproximar el resultado por decimales, se agregan sucesivamente tres ceros á las restas por cada decimal que se quiera obtener en la raíz, y se continuará la operación*

conforme á la regla general hasta tener el grado de aproximación que se desea; teniendo cuidado de separar en la raíz con una coma la parte entera de la decimal.

Sea por ejemplo extraer la raíz cúbica de 12345.

$\sqrt[3]{12,345}$	23‘1		
8	12		
43,45	1587	23	23
36 00		23	3
5 40		69	69
27		46	
178‘0,00		529	
158 700		3	
690		1587	
1			
18‘609			

$$12345=(23‘1)^3+18‘609$$

Ejecutando la operación conforme á la regla, se llega á obtener la raíz 23 y como resta 178. Para aproximar por decimales, se agregan tres ceros y se pone una coma á la derecha de 23 unidades de la raíz, y después se determinan las décimas ejecutando la operación conforme á la regla general.

Demostración.—Como el cubo de una decimal consta de un número triple de cifras decimales que su raíz, resulta que para que haya décimas en la raíz es preciso que haya milésimas en el cubo, por lo que agregaremos tres ceros á la resta para reducirla á milésimas y obtener las décimas de la raíz. Para que haya centésimas en la raíz debe haber millonésimas en el cubo, y por esto tendremos que agregar dos veces tres ceros, y así sucesivamente.

Regla.—*Para determinar el valor de la resta, cuando se ha aproximado la raíz cúbica por decimales, se separarán, contando de derecha á izquierda triple número de cifras decimales de las que tenga la raíz.*

En el último ejemplo la resta es 18‘609. Si la raíz tuviera dos cifras decimales, la resta tendría seis, y así sucesivamente.

216.—Extracción de la raíz cúbica de las decimales.—Ocurren dos casos: cuando hay enteros juntos con decimales, ó cuando sólo hay decimales.

Primer caso.—*Cuando hay enteros y decimales, antes de comenzar la operación se examina si el número de cifras decimales es ó no múltiplo de tres, teniendo cuidado cuando no lo es, de agregar á la derecha uno ó dos ceros para satisfacer esta condición. En seguida se extrae la raíz de los* *enteros, se pone una coma á la derecha de las unidades de la raíz y luego se bajan sucesivamente los períodos decimales para determinar la parte decimal de la raíz.*

Sea como ejemplo extraer la raíz cubica de 36'4. No siendo el número de decimales múltiplo de 3, comenzamos por hacerlo, agregando dos ceros, y en seguida ejecutamos la operación conforme á la regla.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{36'400} & 3'3 \\ 27 & \overline{27} \\ \hline 9'400 & \\ 8\,100 & \\ 810 & \\ 27 & \\ \hline 463 & \end{array} \qquad 36'4=(3'3)^3+0'463.$$

Demostración.—Al agregar ceros á la derecha de la parte decimal, el valor de ésta no se altera; (168—3°) y es preciso agregar tres ceros, porque según se ha visto en el párrafo anterior, por cada cifra decimal que hay en la raíz cúbica, debe haber tres en el cubo.

Segundo caso. —*Cuando solo hay decimales, se comienza por hacer que el número de éstas sea tres ó un múltiplo de tres, y á este fin se agregan, cuando sea necesario, uno ó dos ceros á la derecha. En seguida se pone cero en la raíz para representar su parte entera, una coma, y se extrae la raíz de las decimales como si fueran enteros, por la regla general.*

Si se quiere extraer la raíz cúbica de 0'7654, se comienza por agregar dos ceros á la derecha:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{0'765,400} & 0'91 \\ 729 & \overline{243} \\ \hline 364,00 & \\ 243\,00 & \\ \hline 2\,70 & \\ 1 & \\ \hline 118\,29 & \end{array}$$

$$0'7654=(0'91)^3+0'11829.$$

Se pone 0 enteros en la raíz porque la raíz de cero es cero, y se determina la de la parte decimal que es 0'91.—Esta regla tiene el mismo fundamento que el caso anterior.

Cuando la parte decimal sea una fracción periódica, en lugar de agregar ceros, tanto para hacer que las cifras decimales sean tres ó múltiplas de tres, como para aproximar la raíz, se agregarán las cifras respectivas del período.

La prueba de la raíz cúbica se hace elevando al cubo la raíz hallada, y agregando la resta debe obtenerse el número propuesto. Operación que se facilita reduciendo las cantidades á unidades simples.

217.—Extracción de la raiz cúbica de los quebrados.—Ocurren tres casos: 1°, *cuando los dos términos del quebrado tienen raíz exacta;* 2°, *cuando uno solo la tiene;* y 3°, *cuando ni el numerador ni el denominador tienen raíz exacta.*

En el *primer caso* se extrae la raíz del numerador y la del denominador, y el quebrado formado con las raíces respectivas de cada término será la raíz cúbica del quebrado propuesto, supuesto que para elevar un quebrado al cubo, se eleva separadamente su numerador y su denominador.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{64}}=\frac{2}{4}$$

En el *segundo caso* se extrae la raíz exacta al término que la tenga, y la del otro se aproxima por decimales. En el quebrado que se obtiene, se agregan al término entero tantos ceros como cifras decimales tenga el otro, en el cual se suprime la coma, operación que equivale á multiplicar los dos términos del quebrado por un mismo número.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{12}}=\frac{2}{2'2}=\frac{20}{22}$$

El *tercer caso* se reduce al segundo, multiplicando los dos términos del quebrado por el cuadrado del numerador, ó por el cuadrado del denominador, según que se quiera obtener un resultado aproximado por exceso ó por defecto.

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}}= \quad \sqrt[3]{\frac{5\times6^2}{6\times6^2}}= \sqrt[3]{\frac{180}{6^3}}=\frac{5'6}{6}=\frac{56}{60}$$

La raíz cúbica de un quebrado puede obtenerse convirtiéndolo préviamente en decimal y extrayéndole á éste la raíz cúbica conforme á la regla dada (216).

Por ejemplo: $\sqrt[3]{\frac{5}{6}}=\sqrt[3]{0'8(3)}=0'94$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 6 \\ 20 & \overline{0'8(3)} \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt[3]{0'833,333} & 0'94 \\ 729 & \overline{243} \\ \hline 1043,33 & \\ 972\,00 & \\ \hline 43\,20 & \\ 64 & \\ \hline 27\,49 & \end{array}$$

La raíz cúbica de un quebrado propio, ó de una decimal es mayor que el quebrado ó la decimal; porque según se ha visto (160 y 177), en la multiplicación de los quebrados ó de las decimales, cualquiera de los factores es mayor que el producto, y aquí la raíz viene á hacer papel de factor del quebrado ó de la decimal dada.

Para extraer la raíz cúbica de un número mixto se ransformará préviamente en quebrado impropio, ó en enteros con decimales, y en seguida se extraerá la raíz del quebrado impropio (217), *ó la de los enteros con decimales* (216).

Para extraer la raíz cúbica de un denominado se convertirá préviamente en decimal, y en esta forma se le extraerá la raíz.

RAZONES Y PROPORCIONES.

218.—Razones.—Para adquirir la idea de la magnitud de una cantidad, hasta ahora lo hemos hecho refiriéndola á la de la unidad; pero hay veces en que el valor de una cantidad se compara con el de otra cantidad de su misma especie, y á la relación que se advierte entre ellas se llama razón de las cantidades comparadas. Por ejemplo, cuando se dice que una persona es 10 años mayor que su hermano, no se atiende al número de años que cada cual tenga y que podrá ser más ó menos grande, sino á la diferencia de edad de las personas, siendo 10 la razón. Cuando se dice que el oro vale 16 y media veces más que la plata, no se refiere el valor de cada metal al de la unidad de su especie, sino que se comparan entre sí los valores de los dos metales, y el resultado $16\frac{1}{2}$ es la *razón.*

Definición.—*Se llama, pues, razón, á la relación que existe entre dos cantidades homogéneas que se comparan,* y también se da este nombre al número que expresa la relación. Cuando los términos de la razón son heterogéneos, se consideran como abstractos.

La comparación puede hacerse determinando la diferencia que hay entre las dos cantidades, ó bien el número de veces que una contiene á la otra. *Las cantidades que se comparan forman los términos de la razón llamándose antecedente al primero y consecuente al segundo.*

219.—Razón aritmética.—Definición.—*Se llama razón aritmética la diferencia que hay entre dos cantidades homogéneas.*

La razón aritmética se indica poniendo un punto entre las dos cantidades que se comparan:

$$22\ .\ 14$$

se lee: 22 es á 14. Otras veces se indica poniendo el signo menos entre las dos cantidades: $22-14=8$. Las dos cantidades 22 y 14 forman los términos de la razón, llamándose á la primera, 22, *antecedente,* y á la segunda, 14, *consecuente* de la razón.

La propiedad fundamental de *la razón aritmética es: que no se altera cuando se agregan ó quitan á sus dos términos cantidades iguales.*

Demostración.—Supuesto que razón aritmética es la diferencia que hay entre dos cantidades, se puede considerar el antecedente como el minuendo, y el consecuente como el substraendo de una resta, y una vez que la resta no se altera cuando se agrega ó se quita una misma cantidad al minuendo y al substraendo (50); otro tanto sucederá con la razón aritmética.

220.—Razón geométrica.—Definición.—*Se llama razón geométrica el cociente que resulta de dividir una por otra dos cantidades homogéneas.*

La razón geométrica, que suele llamarse *por cociente,* se indica poniendo dos puntos entre las cantidades comparadas:

$$24 : 8;$$

y se lee: 24 es á 8. Otras veces se indica en forma de quebrado poniendo el antecedente de la razón como numerador, así $\frac{24}{8}$, y en ambos casos se determina la razón dividiendo el antecedente por el consecuente.

Teorema.—*La razón geométrica no se altera cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número.*

Demostración.—Siendo la razón geométrica el cociente que resulta de dividir uno por otro sus dos términos, y supuesto que el cociente de una división no se altera cuando se multiplican ó dividen el dividendo y el divisor por un mismo número (79); lo mismo sucederá con la razón geométrica. Cuando á ésta se le da la forma de quebrado, se sabe igualmente que el valor de un quebrado no se altera cuando se multiplican ó parten sus dos términos por un mismo número.

221.—Proporciones.—Sucede á menudo en matemáticas, que entre dos cantidades de una especie, existe la misma relación que entre otras dos cantidades, generalmente de diferente especie que la de las primeras, aunque homogéneas entre sí. Esta igualdad de relación de magnitudes ó de valores, es lo que constituye una proporción y es un manantial fecundo en aplicaciones prácticas. Así, cuando por ejemplo, se sabe que 30 varas de paño valen 100 pesos, puede determinarse el valor de 60 ó de otro número cualquiera de varas, á causa de que entre 100 pesos y el valor de 60 varas tiene que haber la misma relación que entre 30 y 60 varas.

Por medio de las proporciones, y valiéndose de métodos más ó menos indirectos, se determinan las distancias con ayuda de los ángulos; el peso de los cuerpos por medio de sus volúmenes, etc.

Definición.—*Se llama, pues, proporción la igualdad de dos razones.* La proporción será aritmética ó geométrica, según sea la clase de las razones que la forman.

Una proporción consta de cuatro términos: dos que forman la primera razón, y dos que constituyen la segunda; siendo siempre de rigor la condición de igualdad entre las dos razones.

222.—Proporción aritmética.—Definición.—*Se llama proporción aritmética la igualdad de dos razones artiméticas.*

La proporción aritmética se indica como sigue:

$$11 \;.\; 7 : 9 \;.\; 5;$$

y se lee: 11 es á 7, como 9 es á 5. Suele llamarse equidiferencia, é indicarse $11-7=9-5$.

Se llaman *antecedentes* en la proporción á los números que en las razones que la constituyen forman también los antecedentes; 11 es el primer antecedente, y nueve el segundo antecedente. Igual distinción se hace con los *consecuentes.* A 7 y á 9 se les llama los *medios* de la proporción: y á 11 y á 5 los *extremos*, indicando estos últimos nombres, la posición relativa de los cuatro términos de la proporción. Se llama *proporción continua aquella cuyos medios son iguales;* por ejemplo:

$$12 \;.\; 8 : 8 \;.\; 4,$$

en este caso, 8 es un medio aritmético entre los números 12 y 4, y la proporción suele indicarse de esta manera:

$$\div\; 12 \;.\; 8 \;.\; 4\;;$$

debiendo repetirse el término medio al leerla.

La propiedad fundamental de la proporción aritmética es, que la suma de los extremos es igual á la de los medios.

Demostración.—Sea la proporción: $13 \;.\; 8 : 9 \;.\; 4,$
la cual podemos poner en la forma $13-8=9-4,$
supuesto que proporción es la igualdad de dos razones. Y como si

á cantidades iguales se agregan iguales, los resultados serán iguales, podremos agregar á cada razón la suma de los consecuentes $8+4$ subsistiendo la igualdad.

$$13-8+8+4=9-4+8+4;$$

pero en el primer miembro de esta ecuación, tenemos que $+8$ y $-8=0$ y en el segundo miembro $+4$ y $-4=0$; luego quedará

$$13+4=9+8;$$

como 13 y 4 son los extremos de la proporción, y 9 y 8 los medios, se infiere que la suma de los extremos es igual á la de los medios.

En la proporción aritmética, la propiedad fundamental nos sirve para resolver dos problemas: primero, encontrar el cuarto término de una proporción cuando se conocen los otros tres; y segundo, hallar un medio aritmético entre dos cantidades dadas.

Regla.—*Para encontrar el cuarto término de una proporción aritmética, si el término que se busca es un extremo, se suman los medios, y de la suma se resta el extremo conocido; si lo que se busca es un medio, se sumarán los extremos y se restará el medio conocido.*

Ejemplo.—Si se quiere encontrar el cuarto término de una proporción aritmética, cuyos tres primeros son

$$15 \;.\; 7 : 10 \;.\; x$$

Sumaremos 7 y $10=17$, y de esta suma restaremos el extremo conocido 15, y como $17-15=2$, este número será el cuarto término de la proporción $15 \;.\; 7 : 10 \;.\; 2$. Lo mismo que se acostumbra en álgebra, aquí hemos representado por x la cantidad desconocida.

Demostración.—Como en la proporción aritmética la suma de los extremos es igual á la de los medios, la suma $7+10$, será igual á la del extremo 15 con el número que buscamos, y como si de la suma de dos cantidades se quita una de ellas, la resta nos da la otra, se infiere que restando de la suma de los medios el extremo conocido, tendremos el otro extremo, cuarto término de la proporción.

Regla.—*Para hallar un medio aritmético, entre dos números dados, se suman éstos y se toma la mitad de la suma.*

Ejemplo.—Para hallar un medio aritmético entre los números 9 y 17, se suma $9+17=26$ y la mitad, 13 de 26, será el medio aritmético buscado.

$$9 \;.\; 13 : 13 \;.\; 17$$

Demostración—Debiendo ser la suma de los extremos conocidos igual á la de los medios, cuando éstos hayan de ser iguales, la suma de los extremos será el doble del término medio, luego tomando la mitad de la suma de los extremos, obtendremos el medio aritmético.

TEOREMA.—*Recíprocamente, siempre que en cuatro cantidades la suma de dos de ellas sea igual á la de las otras dos, las cuatro cantidades formarán una proporción aritmética.*

DEMOSTRACIÓN.—Sean las cuatro cantidades 17, 11, 28, 22 en las que se tiene que $17+22=11+28$.

Como si á cantidades iguales se quitan iguales, los resultados serán iguales, la ecuación anterior subsistirá restando á sus dos miembros el segundo y cuarto término, esto es,

$$17+22-11-22=11+28-11-22;$$

pero como $+22-22=0$ y $+11-11=0$,
quedará: $17-11=28-22$,

y supuesto que proporción aritmética es la igualdad de dos razones aritméticas, con las cuatro cantidades podemos formar una proporción,

$$17 \,.\, 11 : 28 \,.\, 22,$$

que es lo que se quería demostrar.

Este principio sirve de fundamento á varias transformaciones que pueden hacerse en una proporción aritmética sin alterarla, y son: *alternar* medios ó extremos; *invertir* los medios por los extremos, y *permutar* las razones.

223.—PROPORCIÓN GEOMÉTRICA.—DEFINICIÓN.—*Se llama proporción geométrica, la igualdad de dos razones geométricas.*

La proporción geométrica se indica así

$$24 : 8 :: 27 : 9,$$

y se lee: 24 es á 8 como 27 es á 9. Se suele llamar proporción por cociente é indicarse: $\frac{24}{8}=\frac{27}{9}$ leyéndose siempre del mismo modo. Las denominaciones de *antecedentes, consecuentes, medios, extremos, primera* y *segunda razón*, son las mismas que las explicadas en la proporción aritmética.

Se llama proporción geométrica continua aquella cuyos medios son iguales, y suele indicarse así:

$$\div\, 16 : 8 : 4,$$

y se lee: 16 es á 8 como 8 es á 4.

La propiedad fundamental de la proporción geométrica es que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

DEMOSTRACIÓN.—Desarrollaremos nuestro raciocinio con la proporción:

$$5 : 15 :: 6 : 18$$

Fundándonos en que razón geométrica, es el cociente que resulta de dividir una por otra dos cantidades, tendremos que la primera razón es $\frac{5}{15}$ y que la segunda es $\frac{6}{18}$, y como proporción es la igualdad de dos razones, podremos establecer la ecuación

$$\frac{5}{15}=\frac{6}{18}$$

Como si cantidades iguales se multiplican por iguales, los resultados serán iguales, la ecuación anterior subsistirá multiplicando sus dos miembros por el producto 15×18 de los consecuentes y tendremos:

$$\frac{5}{15}\times15\times18=\frac{6}{18}\times15\times18.$$

Como en el primer miembro tenemos 15 como factor y 15 como divisor, el cociente será la unidad: y en el segundo miembro tenemos 18 que multiplica y 18 que divide, igual á 1; haciendo las correspondientes simplificaciones resulta que:

$$5\times18=6\times15,$$

pero 5 y 18 son los extremos, y 6 y 15 los medios, luego el producto de los extremos será igual al de los medios.

La propiedad fundamental sirve para resolver dos problemas de la proporción geométrica. primero encontrar un término cuando se conocen los otros tres; y segundo, hallar un medio geométrico entre dos números dados.

REGLA.—*Para encontrar el extremo de una proporción geométrica, se multiplican los medios, y el producto se divide por el extremo conocido, para hallar un medio se multiplican los extremos, y el producto se divide por el medio conocido.*

EJEMPLO.—Se quiere encontrar el cuarto término de la proporción geométrica.

$$3 : 9 :: 7 : x.$$

Multiplicaremos los medios 7 y 9, y el producto 63 lo dividiremos por el extremo 3 conocido; el cociente 21 será el cuarto término de la proporción:

$$3 : 9 :: 7 : 21,$$

Este principio es el fundamento de la resolución de los problemas que se llaman *regla de tres* y de sus numerosas aplicaciones.

DEMOSTRACIÓN.—Como en toda proporción geométrica, según hemos visto, el producto de los extremos es igual al de los medios, el producto 63 de los medios será igual al del extremo 3 multiplicado por el extremo que buscamos; y como si el producto de dos cantidades se divide por una de ellas, el cociente será el otro factor, resulta, que dividiendo el producto de los medios por el extremo conocido 3, el cociente será el otro extremo, 21, cuarto término de la proporción.

REGLA.—*Para encontrar un medio geométrico entre dos números dados, se multiplicarán éstos y al producto se le extrae la raíz cuadrada.*

EJEMPLO.—Se quiere encontrar un medio geométrico entre 4 y 16. Multiplicaremos $4 \times 16 = 64$ y extrayendo la raíz cuadrada á 64; que es 8, este número será el medio geométrico buscado.

$$\div\!\div\ 4 : 8 : 16.$$

DEMOSTRACIÓN.—Siendo el producto de los extremos igual al de los medios, en la proporción geométrica continua será igual al cuadrado del término medio; luego extrayendo la raíz cuadrada al producto de los números dados, obtendremos el medio geométrico buscado.

TEOREMA.—*Recíprocamente, siempre que en cuatro cantidades el producto de dos de ellas es igual al de las otras dos, las cuatro cantidades estarán en proporción geométrica.*

DEMOSTRACIÓN.—Si en las cuatro cantidades 8, 3, 24 y 9, se verifica que el producto de dos de ellas es igual al de las otras dos, podremos poner la ecuación:

$$8 \times 9 = 3 \times 24.$$

Dividiendo los dos miembros por el producto, 3×9, de la segunda por la cuarta cantidad, tendremos:

$$\frac{8 \times 9}{3 \times 9} = \frac{3 \times 24}{3 \times 9}$$

simplificando estos quebrados, resulta que

$$\frac{8}{3} = \frac{24}{9}$$

siendo iguales los dos cocientes que dan estas cantidades, podremos formar la proporción:

$$8 : 3 :: 24 : 9,$$

que es lo que se quería demostrar.

Este teorema nos sirve para efectuar diversas transformaciones en una proporción geométrica sin que se altere.

224.—TRANSFORMACIONES QUE PUEDEN EFECTUARSE EN LA PROPORCIÓN GEOMÉTRICA.—Fundándonos en que, siempre que en cuatro cantidades se verifique que el producto de los extremos es igual al de los medios las cuatro cantidades estarán en proporción; podremos efectuar en una proporción dada, las tres transformaciones siguientes que referiremos á la proporción 3 : 4 :: 6 : 8.

1ª *Alternar, que es mudar de lugar los medios ó los extremos.*

Por ejemplo de	3 : 4 :: 6 : 8
Alternando medios se obtiene	3 : 6 :: 4 : 8
" extremos	8 : 4 :: 6 : 3

DEMOSTRACIÓN.—Si se forma el producto de extremos y medios en la primera y en la segunda proporción, se obtiene:

$$3 \times 8 = 4 \times 6$$

después de alternar $\quad 3 \times 8 = 6 \times 4$

y como el orden de los factores no altera el producto, resulta que, si las cuatro cantidades estaban antes en proporción, después de haber alternado los medios ó los extremos, también lo estarán.

2ª *Invertir, que es poner los medios en lugar de los extremos, y éstos en lugar de aquellos.*

Por ejemplo: refiriéndonos á la proporción	3 : 4 :: 6 : 8
Invirtiendo se obtiene	4 : 3 :: 8 : 6

DEMOSTRACIÓN.—Si se forma el producto de los extremos y de los medios de ambas proporciones, se observará que como los factores son los mismos, sus productos serán iguales, y en consecuencia subsistirá la proporción después de haber invertido.

3ª *Permutar, que es poner la primera razón en lugar de la segunda, y recíprocamente.*

De la proporción	3 : 4 :: 6 : 8
Permutando se obtiene	6 : 8 :: 3 : 4

DEMOSTRACIÓN.—Subsiste la proporción porque los mismos números forman el producto de extremos y medios en ambas proporciones.

Fundándonos en que proporción es *la igualdad de dos razones,* podremos hacer en una proporción dada las tres siguientes transformaciones, las cuales referiremos á la proporción

$$12 : 9 :: 8 : 6$$

4ª *Componer, que es comparar la suma del antecedente y consecuente en cada razón, con el consecuente.*

Por ejemplo, $12 : 9 :: 8 : 6$
Componiendo $12+9 : 9 :: 8+6 : 6.$

En efecto, poniendo la proporción primitiva en forma de ecuación, tendremos:

$$\frac{12}{9}=\frac{8}{6}$$

como si á cantidades iguales se agregan iguales, los resultados serán iguales; agregando 1, resulta:

$$\frac{12}{9}+1=\frac{8}{6}+1$$

ejecutando la suma indicada:

$$\frac{12+9}{9}=\frac{8+6}{6}$$

formando con estos dos cocientes iguales una proporción, se tendrá:

$$12+9 : 9 :: 8+6 : 6$$

expresión que nos hace ver que puede hacerse en una proporción geométrica la transformación que hemos llamado *componer.*

5ª *Dividir, que es comparar la diferencia, entre el antecedente y consecuente en cada razón, con el consecuente.*

Por ejemplo: $12 : 9 :: 8 : 6$
Dividiendo $12-9 : 9 :: 8-6 : 6$

En efecto, tenemos $\frac{12}{9}=\frac{8}{6}$

quitando 1 á estas cantidades iguales, se tiene:

$$\frac{12}{9}-1=\frac{8}{6}-1$$

substituyendo por 1 respectivamente sus valores $\frac{9}{9}$ y $\frac{6}{6}$, se tendrá:

$$\frac{12}{9}-\frac{9}{9}=\frac{8}{6}-\frac{6}{6}$$

ó bien $$\frac{12-9}{9}=\frac{8-6}{6}$$

poniendo estos cocientes en forma de proporción:

$$12-9 : 9 :: 8-6 : 6$$

Expresión que demuestra que puede efectuarse la transformación que hemos llamado *dividir.*

6ª *Se pueden multiplicar ó dividir por un mismo número los antecedentes de una proporción, así como sus consecuentes, sin alterar la proporción.*

Sea la proporción	$12 : 9 :: 8 : 6.$
Multiplicando los antecedentes por 3 cada razón se hará 3 veces mayor.	$36 : 9 :: 24 : 6.$
Dividiendo los antecedentes por 2 cada razón se hará 2 veces menor.	$6 : 9 :: 4 : 6.$
Multiplicando los consecuentes por 5 cada razón se hará 5 veces menor.	$12 : 45 :: 8 : 30.$
Dividiendo los consecuentes por 3 cada razón se hará 3 veces mayor.	$12 : 3 :: 8 : 2.$

Pero como en cualquier caso las dos razones han sufrido igual variación, resulta, que si antes eran iguales, lo serán después de haberse multiplicado ó dividido los antecedentes ó consecuentes por un mismo número.

225.—TEOREMAS Ó PROPIEDADES DE LA PROPORCIÓN GEOMÉTRICA.

I.—*Los antecedentes caben uno en otro el mismo número de veces que los consecuentes.*

Sea la proporción	$4 : 3 :: 8 : 6$
Alternando medios	$4 : 8 :: 3 : 6$

poniendo esta proporción en forma de ecuación, resulta $\frac{4}{8}=\frac{3}{6}$, esto es, el cociente que se obtiene de dividir los antecedentes de la proporción primitiva es igual al que produce la división de los consecuentes, que es lo que se quería demostrar.

II.—*La suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la proporción	$4 : 3 :: 8 : 6.$
Alternando medios	$4 : 8 :: 3 : 6.$
Componiendo	$4+8 : 8 :: 3+6 : 6.$
Alternando medios	$4+8 : 3+6 :: 8 : 6.$

y supuesto que 4 y 8 son los antecedentes, y 3 y 6 son los consecuentes, resulta demostrado el teorema.

III.—*La diferencia de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la proporción	$4 : 3 :: 8 : 6.$
Alternando medios	$4 : 8 :: 3 : 6.$
Dividiendo	$4-8 : 8 :: 3-6 : 6.$
Alternando medios	$4-8 : 3-6 :: 8 : 6.$

y supuesto que 4 y 8 son los antecedentes, y 3 y 6 son los consecuentes, resulta demostrado el teorema.

IV.—*Una proporción no se altera cuando se multiplican ó dividen sus cuatro términos por un mismo número.*

Sea la proporción $4 : 3 :: 8 : 6.$
Multiplicando por 10 todos los términos $40 : 30 :: 80 : 60.$

Esto se funda en que una razón geométrica no se altera cuando se multiplican ó parten sus dos términos por un mismo número.

V.—*Si se multiplican ordenadamente dos proporciones, los cuatro productos que resulten estarán igualmente en proporción.*

Sean las proporciones

$$3 : 4 :: 6 : 8$$
$$10 : 9 :: 20 : 18$$

y vamos á demostrar que estarán igualmente en proporción los productos

$$3\times10 : 4\times9 :: 6\times20 : 8\times18$$

poniendo cada proporción en forma de ecuación, se tendrá:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$

$$\frac{10}{9}=\frac{20}{18}$$

y como si cantidades iguales se multiplican por iguales, los resultados también lo serán, se tendrá:

$$\frac{3}{4}\times\frac{10}{9}=\frac{6}{8}\times\frac{20}{18}$$

ejecutando la operación

$$\frac{3\times10}{4\times9}=\frac{6\times20}{8\times18}$$

y con estos valores podemos establecer la proporción

$$3\times10 : 4\times9 :: 6\times20 : 8\times18$$

que es lo que debíamos demostrar.

VI.—*Si cuatro cantidades están en proporción, sus potencias del mismo grado también lo estarán.*

Sea la proporción $3 : 4 :: 6 : 8$
Puesta en forma de ecuación $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

Si cantidades iguales se elevan á una misma potencia, los resultados serán iguales; y como para elevar un quebrado á una potencia, es nece-

sario elevar cada uno de sus términos, resulta, que si elevamos los dos quebrados $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ á una potencia cualquiera, á la cuarta, por ejemplo, tendremos:

$$\frac{3^4}{4^4}=\frac{6^4}{8^4}$$

y con estas cuatro cantidades formaremos una proporción,

$$3^4 : 4^4 :: 6^4 : 8^4$$

resultando así demostrado el teorema.

VII.—*Si cuatro cantidades están en proporción lo estarán igualmente sus raíces de un mismo grado.*

Sea la proporción $27 : 64 :: 216 : 512.$
Puesta en forma de ecuación será $\frac{27}{64}=\frac{216}{512}.$

y como las raíces de cantidades iguales son iguales, y la raíz de un quebrado se obtiene extrayéndola al numerador y al denominador, resulta que extrayendo, por ejemplo, la raíz cúbica de los dos miembros de la última ecuación, se obtiene:

$$\sqrt[3]{\tfrac{27}{64}}=\sqrt[3]{\tfrac{216}{512}},$$

ó

$$\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{512}}$$

ecuación que puesta en forma de proporción,

$$\sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{64} :: \sqrt[3]{216} : \sqrt[3]{512}.$$

demuestra el teorema.

VIII.—*Cuando deban multiplicarse ordenadamente dos ó más proporciones, se podrán suprimir los factores que sean comunes á los dos términos de la misma razón, los que sean comunes á los antecedentes, y los que lo sean á los consecuentes, multiplicándose únicamente los términos restantes.*

Sean por multiplicar las tres proporciones
$$\left\{\begin{array}{l} 2 : (3) :: 4 : 6 \\ (3) : 9 :: (5) : 15 \\ (5) : 4 :: 10 : 8. \end{array}\right.$$

$$2 : 9\times4 :: 4\times10 : 6\times15\times8.$$

En este ejemplo se podrá suprimir 3, que hemos colocado dentro de un paréntesis, por ser factor común al antecedente y al consecuente de la primera razón: y se podrá suprimir 5 por ser factor común á los antecedentes de la proporción final.

La primera operación equivale á dividir por 3 los dos términos de la primera razón de la proporcion final, lo que no la altera; y la segunda operación equivale á dividir los antecedentes de la proporción resultante por 5, lo que tampoco la altera; pero debe tenerse cuidado de *no suprimir un término común á los medios ó á los extremos.* En el ejemplo de que nos ocupamos, se tiene 4 como factor de los medios que no puede suprimirse.

* (226).—Observaciones sobre las razones y las proporciones.—La razón aritmética es la diferencia entre dos cantidades. La geométrica es la indicación de un cociente por las cantidades que lo engendran. Las proporciones son la igualdad de dos razones. Toda la teoría y aplicaciones de las proporciones, están fundadas en la igualdad de las razones que constituyen la proporción, ó en su propiedad fundamental, que se deduce de esta igualdad, ó de que la suma, y en su caso de que el producto de los medios es igual al de los extremos. La principal aplicación de las proporciones es la de encontrar el cuarto término cuando se conocen los otros tres; pero siendo de uso frecuente las propiedades y transformaciones de las proporciones en matemáticas, conviene á los alumnos estar muy familiarizados con todo lo concerniente á ellas.

REGLA DE TRES.

227.—Problema.—En una semana 10 caballos consumen 3 cargas de cebada: en el mismo tiempo 25 caballos ¿cuántas cargas consumirán?

Como si el número de caballos se duplica, se duplicará igualmente el número de cargas de cebada que consumirán, y como si se triplican los caballos se triplicarán las cargas de cebada, se infiere que la misma relación que haya entre los números de los caballos, habrá entre las cargas consumidas, y por tanto, estas cantidades, por la naturaleza de la cuestión, serán proporcionales. Si representamos por x el número de cargas de cebada que buscamos, podremos establecer la siguiente proporción geométrica:

$$\overset{\text{cab.}}{10} : \overset{\text{cab.}}{25} :: \overset{\text{cgs.}}{3} : \overset{\text{cgs}}{x}$$

y como, conforme á lo explicado en las proporciones *para determinar el valor del cuarto término que se busca, hay que multiplicar los medios,* 3 *y* 25, *y dividir el producto por el extremo,* 10, *conocido tendremos que*

$$x=\frac{3\times25}{10}=7\tfrac{1}{2} \text{ cargas de cebada,}$$

que será el consumo de los 25 caballos.

Se llama regla de tres, todo problema en que conocidos tres términos de una proporción geométrica, queda por determinar el cuarto.

228.—Problemas que pueden resolverse por regla de tres.—*Se conoce que una cuestión es de regla de tres cuando satisface á las siguientes condiciones:* 1ª, *que el enunciado del problema esté dividido en dos períodos;* 2ª, *que los términos del primer período sean homogéneos respectivamente á los del segundo;* 3ª, *que se conozcan tres cantidades y se busque una;* y 4ª, *que por la naturaleza del problema las cantidades sean proporcionales.*

Supuesto que en toda proporción la relación entre las dos cantidades que forman la 1ª razón, ha de ser la misma que existe entre las otras dos, se comprende la necesidad de la división del enunciado del problema en dos períodos, y la de que los términos del primer período sean respectivamente de la misma especie que los del segundo. Además, como la cuestión lleva por objeto encontrar el cuarto término de una proporción; es indispensable que se conozcan tres cantidades y se busque una.

En cuanto á la 4ª condición, fácilmente se comprende que para que pueda determinarse la cantidad desconocida por medio de la regla dada para hallar el 4º término de una proporción geométrica, es indispensable que las cantidades del problema, por la naturaleza de éste, sean proporcionales.

En el problema propuesto es fácil ver que están satisfechas las tres primeras condiciones, y respecto de la 4ª observaremos que los caballos y las cargas de cebada consumidas son cantidades *relativas,* puesto que del número de los primeros depende el de las cargas, y además que si se multiplican por determinado número los caballos, resultarán las cargas multiplicadas por el *mismo número,* y esta circunstancia, que depende de la naturaleza de la cuestión, es lo que hace que las cantidades que la forman *sean proporcionales.*

Consideremos el siguiente ejemplo: caminando 12 leguas al día, ha tardado una persona 15 días para ir de una ciudad á otra; caminando 10 leguas ¿cuántos dias empleará para recorrer la misma distancia?

En este problema las cantidades *relativas* son las leguas que se caminan diariamente y los días que se emplean; pero la naturaleza de la cuestión es tal, que si se *duplica* el número de leguas que se andan cada dia, los dias que se emplean para recorrer la distancia, serán la *mitad* de los que se emplearon antes; esto es, *multiplicando* por un *número* dado el camino recorrido diariamente, resultarán divididos por el *mismo número* los dias necesarios para recorrer la distancia. Esta circunstancia es la que constituye que las cantidades del problema sean proporcionales. En el 1er ejemplo las cantidades relativas están en razón directa, y en el 2° están en razón inversa.

Cantidades relativas son las que están ligadas entre sí, de modo que el valor de una depende del que tenga la otra.

Para conocer si las cantidades relativas son proporcionales, se observará si, á causa de la naturaleza de la cuestión, multiplicando una de las cantidades por un número, su relativa debe resultar multiplicada unas veces, y dividida otras, por el mismo número.

Esta investigación es de la mayor importancia, porque la facilidad con que la regla de tres conduce á la determinación de una cantidad desconocida, hace que á veces se quiera aplicar indebidamente á algunos problemas. Por ejemplo, si se sabe que para enlosar un patio cuadrado que tiene 10 varas de lado, se han necesitado 100 losas de á vara cuadrada, y se quiere saber cuántas se necesitarán para enlosar otro patio también cuadrado de 20 varas de lado, este problema no será de regla de tres, porque en un patio cuyo lado es doble, no entra doble número de losas, sino cuádruplo.

Hay problemas que se resuelven por una sola proporción, y otros por varias proporciones ligadas entre sí.

229.—Casos de la regla de tres.—Para facilitar la resolución de los problemas relativos á la regla de tres, se subdivide ésta *en simple y compuesta;* y la simple *en directa ó inversa.*

Se llama regla de tres simple, aquella en que se conocen tres cantidades y se busca una.

Regla de tres compuesta, es aquella en que se conocen más de tres cantidades ligadas entre sí por varias proporciones geométricas y se tiene que determinar una cantidad desconocida.

Antes de definir las reglas de tres directa é inversa, haremos algunas explicaciones.

En toda regla de tres, dos de las cantidades conocidas son homogéneas y la otra es de la especie del número que se busca; además, las cantidades generalmente de diversa especie son *relativas* entre sí de dos en dos. Por ejemplo, si sabiendo que 30 varas de paño han costado 50 pesos, se quiere averiguar cuánto costarán 40 varas; en este caso 30 varas y 50 pesos son cantidades *relativas*, asi como 40 varas y el valor que se busca. Pues bien, en la regla de tres se presentan dos casos distin-

tos: primero, cuando la naturaleza de la cuestión es tal, que al cambiar de valor una de las cantidades, su *relativa* experimenta una variación en el mismo sentido, esto es, crece, cuando la primera crece, ó disminuye cuando la primera cantidad disminuye; segundo, cuando la variación es en sentido contrario, esto es, que cuando una cantidad aumenta, su *relativa* disminuye; y cuando una cantidad disminuye, su *relativa* crece proporcionalmente á la disminución de la primera. En el primer caso, se dice que la regla de tres es *directa*, en el segundo que es *inversa.* Algunos ejemplos aclararán esto.

Si 20 hombres han hecho 35 varas de terraplén en un día, 40 hombres cuántas varas harán? Aquí se comprende, por la naturaleza del problema, que si el número de hombres que trabaja aumenta, igualmente aumentará el número de varas; por tanto, como de *más hombres* vamos á buscar *más varas,* la regla de tres será *directa.*

Para hacer una obra, 20 hombres han empleado 5 dias, 40 hombres ¿cuántos dias emplearán? Aquí se observa que mientras *más* hombres trabajen, *menos* tiempo emplearán; en consecuencia como de *más hombres* vamos á buscar *menos dias*, la regla de tres será *inversa.*

Es fácil darse cuenta de la razón por la cual en los problemas de regla de tres directa, la variación de las cantidades relativas es en el mismo sentido, y en los de regla de tres inversa es en sentido contrario.

Por ejemplo, cuando sabiendo que 20 hombres han hecho en un dia 35 varas de terraplén, queremos determinar cuántas varas harán 40 hombres en el mismo tiempo; la incógnita, que son las varas del terraplén, es producto de su cantidad relativa, el número de hombres, multiplicado por las varas de terraplén que al día hace cada hombre; y como el producto experimenta variaciones semejantes á las de uno de sus factores, (62) el número de hombres que trabajan, la regla de tres será directa. El segundo factor del valor de la incógnita, las varas de terraplén que al día hace cada hombre, no se expresa ni hay necesidad de conocerlo para resolver nuestro problema; pero se supone constante y de esto resulta que *las cantidades relativas, que son el producto y uno de sus factores, varíen de un modo semejante.*

Cuando sabiendo que 20 hombres han empleado 5 días para hacer una obra, queremos determinar cuántos días emplearán 40 hombres para hacer otra obra igual; esta obra, cuyo valor numérico no se indica en el problema, es *un producto constante* siendo sus factores los hombres que trabajan, la obra diaria que cada uno hace y los días que dura el trabajo, de lo que resulta que *las cantidades relativas son factores de un producto fijo*, por lo cual si uno de estos factores, el número de hombres que trabajan, *aumenta*, forzosamente tendrá que *disminuir* el otro factor, los días que trabajan, en la misma relación (63), y esto hace que el problema sea de regla de tres inversa, para cuya resolución no se necesita conocer la obra total ni la parte de obra que cada hombre hace al día.

Se ve, pues, que cuando por la naturaleza de la cuestión *las cantidades relativas sean el producto y uno de sus factores* variarán en el mismo sentido y la regla de tres será directa, y que cuando *las cantidades relativas sean dos de los factores de un producto constante*, tendrán que variar en sentido contrario y la regla de tres será inversa.

Definición.—*Se llama regla de tres directa, aquella en la que las variaciones de las cantidades relativas se verifican en el mismo sentido*, esto es, en la que de *lo más* se va á buscar *lo más* ó de *lo menos* se va á buscar *lo menos.*

Definición.—*Regla de tres inversa, es aquella en la que las variaciones de las cantidades relativas se verifican en sentido contrario*; esto es, en la que *de lo más* se va á buscar *lo menos* ó de *lo menos* se va á buscar *lo más.*

230.—Resolución de la regla de tres simple.—Cuando conforme á lo explicado en el número 228, se ha averiguado que una cuestión debe resolverse por medio de una proporción, queda por determinar el lugar que cada cantidad debe ocupar en ella.

Se tiene costumbre de que el cuarto término sea la cantidad que se busca, por lo cual será el tercero la cantidad de la misma especie que la incógnita: establecida así la segunda razón de la proporción, la primera razón la formarán las cantidades conocidas de la misma especie; pero el orden de éstas lo determina la naturaleza de la cuestión, fundándose en que en toda proporción geométrica, si un consecuente es mayor que su antecedente, el consecuente de la otra razón debe ser también mayor que su antecedente; y si un consecuente es menor que su antecedente, el consecuente de la otra razón también lo será.

Tomemos como ejemplo las siguientes cuestiones:

1ª Un correo que camina con una velocidad uniforme, ha andado en 16 horas 50 leguas; en 24 horas, ¿cuántas leguas andará? Formada la segunda razón con 50 leguas y con x, se reflexionará para determinar el orden de los números 16 y 24 horas que han de formar la primera razón, que como en más horas se andarán más leguas, naturalmente el término que buscamos será mayor que su antecedente, 50 leguas; y por tanto el consecuente de la primera razón deberá ser mayor que su antecedente, y la proporción quedará definitivamente establecida así:

$$\overset{\text{hs.}}{16} : \overset{\text{hs.}}{24} :: \overset{\text{lgs.}}{50} : x$$

y se tendrá:

$$x = \frac{24 \times 50}{16} = 75 \text{ leguas}$$

2ª Para ir de una ciudad á otra, un correo que camina 3 leguas por hora ha dilatado 16 horas; caminando 4 leguas por hora ¿cuánto tiempo empleará para andar la misma distancia? La segunda razón se formará con 16 y el término que se busca; y la primera razón la expresaremos con las velocidades 3 y 4 leguas por hora. Para determinar el orden de los términos de la primera razón, notaremos que supuesto que mientras más leguas se andan en cada hora, menos tiempo se empleará para recorrer una distancia dada, el término que buscamos será menor que 16 horas; y por tanto el consecuente de la primera razón deberá ser menor que su antecedente, y la proporción quedará establecida así:

$$4^{\text{ls}} : 3^{\text{ls}} :: 16^{\text{hs}} : x$$

$$x = \frac{3 \times 16}{4} = 12$$

Se ve, pues, que por el examen atento de la cuestión, puede siempre determinarse si la incógnita debe ser mayor ó menor que su homogénea; *en el caso que deba ser mayor*, se tendrá cuidado de colocar en la primera razón, formada con las dos cantidades homogéneas conocidas, como 2º *término la mayor; si por el contrario, la incógnita ha de ser menor* que su homogénea, se colocará en la primera razón *como* 2º *término* la cantidad menor de las dos conocidas de la misma especie.

Estos raciocinios siempre conducirán á colocar en el lugar correspondiente de la proporción los datos de un problema de regla de tres, que es lo que se llama plantear la cuestión; pero mucho se facilita la resolución determinando préviamente, si la regla de tres es directa ó inversa y aplicando en seguida la siguiente

Regla para resolver la regla de tres planteando la proporción.—*La primera razón se formará con las dos cantidades homogéneas conocidas; poniendo como primer término, cuando la regla de tres sea directa la cantidad relativa á la conocida de la misma especie que la incógnita, y cuando sea inversa, la relativa á la incógnita. La segunda razón se formará con la cantidad de la misma especie que la incógnita y con la incógnita.* Vamos á aplicar esta regla á un problema de la regla de tres directa y á otro de inversa.

Regla de tres directa.—Si 12 marcos de plata han costado 102 pesos, ¿8 marcos cuánto costarán? Generalmente se escriben los datos de la cuestión de la manera siguiente:

marcos.	$
12	102
marcos	
8	x

Siendo el problema de regla de tres directa, en razón de que menos marcos costarán menos pesos, formaremos la primera razón con las dos cantidades homogéneas conocidas, teniendo cuidado de poner como primer término 12 marcos que es la cantidad relativa á 102 pesos, cantidad de la especie de la incógnita, estableciendo así la proporción:

$$\overset{\text{marcos}}{12} : 8 :: \overset{\$}{102} : x$$

Para cerciorarnos de que está bien planteada la proporción raciocinaremos como sigue: debiendo ser, por la naturaleza de la cuestión, el valor de la incógnita x menor que $102, en la primera razón deberá también ser el consecuente 8 marcos menor que el antecedente 12 marcos, y estando bien establecidos los términos de la proporción, el valor que buscamos será:

$$x = \frac{102 \times 8}{12} = \overset{\$}{68}$$

Regla de tres inversa.—Trabajando un hombre diariamente 6 horas, ha empleado 12 días para hacer una obra; trabajando 8 horas, ¿cuántos días empleará?

horas.	días.
6	12
horas.	
8	x

Supuesto que trabajando *más* horas diariamente, se emplearán *menos* días para hacer la misma obra, la regla de tres será inversa y aplicando la regla dada, formaremos la primera razón con las cantidades homogéneas *conocidas*, teniendo cuidado de poner como primer término, 8 *horas, que es la relativa á la incógnita*, estableciendo la proporción como sigue:

$$\overset{\text{hs.}}{8} : \overset{\text{hs.}}{6} :: \overset{\text{días.}}{12} : x$$

Nos cercioraremos de que está bien planteada la porporción raciocinando como sigue: debiendo ser, por la naturaleza de la cuestión el valor de la incógnita x menor que 12 días, en la primera razón deberá ser igualmente el consecuente 6 horas menor que su antecedente 8 horas. Estando bien establecidos los términos de la proporción, el valor que buscamos será:

$$x = \frac{12 \times 6}{8} = 9 \text{ días.}$$

Método de reducción a la unidad.—Supuesto que regla de tres es una cuestión en la que conociendo tres términos de una proporción geométrica se trata de determinar el cuarto, el método fundamental para resolver esta clase de problemas, es plantear la proporción y calcular el valor de la cantidad desconocida; pero en aritmética se emplea también otro procedimiento, que vamos á explicar, el cual evita la clasificación de si la regla de tres es directa ó inversa y transforma estos problemas en aplicaciones del uso de la multiplicación: conocido el valor de una unidad determinar el de muchas; y del uso de la división: conocido el valor de varias unidades determinar el de una.

Ejemplo.—12 marcos de plata han costado 102 pesos: 8 marcos ¿cuántos pesos costarán?

Dispondremos los datos del problema como sigue:

12 marcos han costado	$102
8 marcos costarán	x

Al principio prescindiremos del segundo período y fijándonos en el primero, diremos: si 12 marcos han costado $102, un marco costará 12 veces menos, esto es:

$$1 \text{ marco costará} \ldots \$ \frac{102}{12}$$

En seguida, tomando en consideración el segundo período de la cuestión, diremos:

$$\text{si } 1 \text{ marco cuesta} \ldots \$ \frac{102}{12}$$

$$8 \text{ marcos costarán} \ldots \$ \frac{102 \times 8}{12} = \$68$$

Ejemplo.—12 albañiles han hecho una pared en 15 días; trabajando 18 albañiles ¿cuántos días emplearán para hacer otra pared igual?

Para hacer una pared	12 albañiles	han empleado	15 días
„	18 „	emplearán	x

Fijándonos en el primer período, diremos: si trabajando 12 albañiles para hacer una pared emplean 15 días, un albañil habría empleado 12 veces más días, esto es:

$$1 \text{ albañil empleará} \ldots \overset{\text{días}}{15 \times 12}$$

Considerando el segundo período de la cuestión, diremos: si 1 albañil emplea 15×12 días para hacer una pared

$$18 \text{ albañiles emplearán} \ldots \frac{\overset{\text{días}}{15\times12}}{18}=10 \text{ días}$$

Regla para resolver los problemas de regla de tres por el método de reducción á la unidad.—*En el primer período de la cuestión se determinará el valor de una unidad de la cantidad relativa á la conocida de igual especie que la incógnita; en seguida considerando el segundo período, se calculará el valor de la cantidad relativa á la incógnita.*

Es conveniente limitarse á indicar los cálculos y simplificar el valor de la incógnita antes de ejecutar las operaciones.

Ejemplos.—10 esterios de arena pesan 24 toneladas, 35 esterios ¿cuántas toneladas pesarán?

Si 10 esterios pesan 24 toneladas

$$1 \text{ esterio pesará } \frac{24 \text{ ton.}}{10}$$

$$\text{y } 35 \text{ esterios pesarán } \frac{24\times35}{10}=84 \text{ toneladas.}$$

Estudiando 5 páginas al día se repasa el curso en 60 días; estudiando 6 páginas ¿en cuántos días se repasaría?

5 páginas 60 días
6 " x

Si estudiando 5 páginas se hace el repaso en 60 días, estudiando 1 página se hará en 60 ds. $\times5$

$$\text{y estudiando 6 páginas se hará en } \frac{60 \text{ ds.} \times5}{6}=50 \text{ ds.}$$

Sea cual fuere el procedimiento que se use, fácil será persuadirse de que el valor de la incógnita se forma siempre conforme á la siguiente

Regla para resolver una regla de tres sin plantear la proporción.—*En una regla de tres, se obtiene el valor de la incógnita multiplicando la cantidad de su misma especie por un quebrado formado con las cantidades homogéneas conocidas, en el que la cantidad relativa á la incógnita se colocará, cuando la regla de tres sea directa, como numerador, y cuando sea inversa se colocará como denominador.*

Basta recordar que el valor de un quebrado experimenta variaciones en el mismo sentido que su numerador, é inversas de las de su denominador para comprender que, dependiendo el valor de la incógnita del de un quebrado, hay que *colocar la cantidad relativa á la incógnita, cuando la regla de tres sea directa, como numerador, y que cuando sea inversa debe ponerse como denominador.*

La aplicación de esta última regla evita el planteo de la proporción y los raciocinios necesarios para resolver una regla de tres por el método de reducción á la unidad.

Aplicaremos esta regla á un ejemplo relativo á cada una de las especies de regla de tres.

16 varas de paño han costado 64 pesos;
124 varas ¿cuánto costarán?

16 v. $ 64
24 x

como *más* varas costarán *más* pesos, la regla de tres será directa, y conforme á la regla el valor de la incógnita se obtendrá multiplicando la cantidad de su misma especie, $64, por un quebrado formado con las cantidades homogéneas conocidas, en el que la cantidad *relativa á la incógnita*, 24 varas, se pondrá *como numerador*, por ser la regla de tres *directa*.

Esto es:

$$x=\$\,64\times\frac{24}{16}=\$\,96$$

6 albañiles han levantado una pared en 10 días, 15 albañiles ¿en cuántos días levantarán otra igual?

$6^{\text{alb.}}$ $10^{\text{ds.}}$
15 x

Como trabajando *más* albañiles tardarán *menos* días, la regla de tres es inversa, y el valor de la incógnita se obtendrá multiplicando la cantidad de su misma especie, 10 días, por un quebrado formado con las cantidades homogéneas conocidas, en el que la cantidad *relativa á la incógnita*, 15 albañiles, se pondrá *como denominador*, por ser la regla de tres *inversa*.

Esto es:

$$x=\overset{\text{d.}}{10}\times\frac{6}{15}=4 \text{ días.}$$

231.—Ejemplos de la regla de tres simple.—I. Para elevar cierta cantidad de agua á la altura de 6 metros, se emplea la fuerza de 4 caballos de vapor; para elevar la misma cantidad de agua á 9 metros de altura ¿cuántos caballos se necesitarán?

II. Caminando un tren de ferrocarril con la velocidad de 36 millas por hora, dilata en recorrer una distancia 10 horas; caminando con la velocidad de 30 millas ¿cuántas horas tardará?

III. Una máquina de vapor de la fuerza de 20 caballos consume 320 cargas de leña á la semana; otra máquina de la fuerza de 55 caballos ¿cuántas cargas consumirá?

IV. Una fuente á la cual le entran 8 pajas de agua se llena en 5 horas; con otro chorro que produce 12 pajas ¿en cuántas horas se llenará?

232.—Prueba de la regla de tres simple.—Se comprueba la regla de tres, poniendo en lugar de la incógnita el número encontrado; y considerando como incógnita uno de los números conocidos, debe encontrarse este como resultado.

233.—Regla de tres compuesta.—Ya dijimos que regla de tres compuesta es todo problema en el que conociéndose más de tres cantidades ligadas entre sí por varias proporciones geométricas se trata de determinar una desconocida.

Se conoce que un problema es de regla de tres compuesta en que satisface las siguientes condiciones: 1ª, *el enunciado de la cuestión está dividido en dos períodos;* 2ª, *las cantidades del primer período son respectivamente homogéneas á las del segundo;* 3ª, *por la naturaleza de la cuestión las cantidades son proporcionales;* y 4ª, *una de las cantidades conocidas es de la especie de la incógnita.*

Por ejemplo:

Si 10 hombres han hecho en 20 días una zanja de 200 metros de largo, 25 hombres en 18 días ¿cuántos metros harán?

hs.	ds.	metros.
10	20	200
25	18	x

El método natural que ocurre para resolver la regla de tres compuesta, es suponer por un momento iguales algunas de las cantidades homogéneas de la cuestión menos dos, con las cuales y con la cantidad de la misma especie que la incógnita, se forma una regla de tres, y resolviendo la proporción se obtiene un primer resultado. En seguida, con otras dos de las cantidades de la misma especie y con el cuarto término hallado en la primera proporción, se forma una segunda proporción y se obtiene un segundo resultado, y así sucesivamente se van estableciendo tantas proporciones como sean necesarias, formando siempre la primera razón con dos de las cantidades homogéneas conocidas; y poniendo como tercer término, el que sirvió de cuarto en la proporción anterior. Cada proporción, según sea el caso, se planteará como regla de tres directa ó inversa.

Refiriéndonos al ejemplo propuesto diremos primero: si 10 hombres han hecho 200 metros de zanja, 25 hombres ¿cuánto harán?

$$\overset{\text{hs.}}{10} : \overset{\text{hs.}}{25} :: \overset{\text{ms.}}{200} : x \qquad x=\frac{25\times 200}{10}=\overset{\text{ms.}}{500}$$

y en seguida, si en 20 días se han hecho 500 metros de zanja, en 18 días ¿cuántos se harán?

$$\overset{\text{ds.}}{20} : \overset{\text{ds.}}{18} :: 500 : x' \qquad x'=\frac{18\times 500}{20}=450$$

450 metros es el valor del resultado que se busca.

Este método se simplifica en la práctica, omitiendo la resolucion de cada proporción, planteando previamente todas, multiplicándolas ordenadamente y haciendo las abreviaciones posibles antes de resolver la proporción final, de la manera siguiente: (225—V y VIII.)

$$\begin{array}{c} 10 : 25 :: 200 : x \\ 20 : 18 :: \ \ x : x' \\ \hline 10\times 20 : 25 \times 18 :: 200\times x : x\times x' \end{array}$$

La segunda razón puede abreviarse *siempre* dividiendo sus términos por x, y en seguida dividiremos los antecedentes sucesivamente por 10 y por 20, y quedará:

$$1 : 25\times 18 :: 1 : x'=450 \text{ metros.}$$

En lo expuesto se funda la siguiente

Regla para resolver la regla de tres compuesta planteando proporciones.—*Se escriben los datos del problema poniendo las cantidades de la misma especie unas debajo de otras: se suponen iguales las cantidades homogéneas menos dos de ellas, con las cuales y con el término de la misma especie que la incógnita se forma una proporción designando por x el cuarto término: en seguida, con otras dos de las cantidades homogéneas y con el cuarto término de la primera proporción, que pasa á tercero, se forma una segunda, designando por x' su cuarto término; y así se continúa estableciendo proporciones hasta haber hecho entrar todos los datos del problema.*

Cada regla de tres simple se planteará conforme á la regla correspondiente, según sea directa ó inversa (230). *En seguida se multiplican ordenadamente las proporciones establecidas, indicando solamente las multipli-*

caciones, y antes de resolver la proporción final, se hacen las abreviaciones posibles, suprimiendo los factores comunes á los términos de cada razón y á los antecedentes.

Sea como ejemplo el siguiente:

30 hombres han hecho una pared de 120 varas de largo y 22 pulgadas de espesor en 7 días, trabajando 8 horas diarias; ¿en cuántos días harán 40 hombres una pared de 150 varas de largo y 28 pulgadas de espesor trabajando 10 horas al día?

$$\begin{array}{l} \text{hs. vs. ps. ds. hor} \\ 30-120-22-7-8 \\ \text{hs.} \\ 40-150-28-x-10 \end{array}$$

La resolución será como sigue:

$$\begin{array}{rcrcccl} 40 & : & 30 & :: & 7^{ds.} & : & x \\ 120 & : & 150 & :: & x & : & x' \\ 22 & : & 28 & :: & x' & : & x'' \\ 10 & : & 8 & :: & x'' & : & x''' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 40\times120\times22\times10 : 30\times150\times28\times8 :: 7 : x''' \\ 4\times\ 12\times22\times10 : 3\times\ 15\times28\times8 :: \\ 1\times\ 3\times22\times\ 2 : 3\times\ 3\times\ 7\times2 :: \\ 1\times22\times\ 1 : 1\times\ 3\times\ 7\times1 :: 7 : x'''=\frac{3\times7\times7}{22}=6\frac{15}{22}\text{ días.} \end{array}$$

Si para la resolución de la regla de tres compuesta se quiere aplicar el

Método de reducción á la unidad, *considerando sucesiva y separadamente cada una de las reglas de tres simples de que se compone el problema, se determinará primero el valor de una unidad del término que, en el primer período del enunciado de la cuestión, es relativo á la cantidad de la misma especie que la incógnita, y en seguida se calculará el valor de la cantidad que en el segundo período es relativa á la incógnita, y así se continuará el cálculo, indicando solamente las operaciones, hasta haber tomado en consideración todos los datos del problema. En la expresión final se harán las simplificaciones posibles.*

Aplicaremos este método al ejemplo anterior, cuyos datos escribiremos como sigue:

$$\begin{array}{l} \text{hs. vs. ps. ds. horas.} \\ 30-120-22-7-\ 8 \\ 40-150-28-x-10. \end{array}$$

y se dice:

si 30 hombres hacen una pared en 7 días

1 la hará en 7×30 ds.

y 40 hombres la harán en $\frac{7\times30}{40}$ ds.

Considerando la 2ª. regla de tres, diremos:

si $120^{vs.}$ se hacen en $\frac{7\times30}{40}$ ds.

1 se hará en $\frac{7\times30}{40\times120}$

y 150 se harán en $\frac{7\times30\times150}{40\times120}$ ds.

En la 3ª. regla de tres, diremos:

si 22^{ps} se hacen en $\frac{7\times30\times150}{40\times120}$ ds.

1 se hará en $\frac{7\times30\times150}{40\times120\times22}$

y 28 se harán en $\frac{7\times30\times150\times28}{40\times120\times22}$ ds.

En la 4ª. regla de tres, diremos:

si trabajando 8 horas al día se emplean $\frac{7\times30\times150\times28}{40\times120\times22}$ ds.

" 1 al día se emplearán $\frac{7\times30\times150\times28\times8}{40\times120\times22}$ ds.

y " 10 " " $\frac{7\times30\times150\times28\times8}{40\times120\times22\times10}$ ds.

El valor definitivo de la incognita es, pues:

$$x=\frac{7\times30\times150\times28\times8}{40\times120\times22\times10}\text{ ds.}$$

Suprimiendo los factores comunes al numerador y al denominador, y ejecutando después las operaciones indicadas, resulta:

$$x\overset{\text{días.}}{=}6+\tfrac{15}{22}$$

Como el valor de la incógnita en el método de las proporciones, ó en el de la reducción á la unidad, puede ponerse en la forma:

$$x\overset{\text{ds.}}{=}7\times\overset{\text{hs.}}{\frac{30}{40}}\times\overset{\text{vs.}}{\frac{150}{120}}\times\overset{\text{ps.}}{\frac{28}{22}}\times\overset{\text{hs.}}{\frac{8}{10}}$$

se infiere la siguiente

Regla para resolver una regla de tres compuesta sin plantear proporciones.—*Considerando sucesiva y separadamente cada una de las reglas de tres simples en que puede descomponerse el enunciado de un problema de regla de tres compuesta, el valor de la incógnita se obtiene multiplicando la cantidad de su misma especie por una serie de quebrados; cada uno de los cuales se formará respectivamente con dos de las cantidades homogéneas conocidas, en el que la cantidad relativa á la incógnita se colocará, cuando la regla de tres sea directa como numerador, y cuando sea inversa como denominador. Se suprimen los factores comunes á los numeradores y á los denominadores, y por último, se ejecutan las multiplicaciones y divisiones indicadas.*

En el ejemplo anterior, el valor de la incógnita sería

$$x=7\times\frac{30\times150\times28\times8}{40\times120\times22\times10}=7\times\frac{3\times7}{22}=6+\frac{15}{22}$$

234.—Ejemplos de regla de tres compuesta.

I.—3 fanegas de tierra se han sembrado de trigo y se han regado con 4 surcos de agua durante 6 horas al día; se quiere saber por cuántas horas deberán regarse al día 5 fanegas sembradas de caña de azúcar contando con tres surcos de agua, y bajo el concepto de que para el riego de la caña se gasta $1\frac{1}{2}$ veces la cantidad de agua que se emplea en el trigo.

f.	s.	h.	
3	4	6	1
5	3	x	$1\frac{1}{2}$

II.—Habiendo hecho un viaje de 450 leguas en 15 días, caminando 10 horas diarias y andando 3 leguas por hora, se quiere saber ¿cuántas horas deberán caminarse al día para recorrer 300 leguas en 12 días, andando $2\frac{1}{2}$ leguas por hora?

ls.	ds.	hs.	ls.
450	15	10	3
300	12	x	$2\frac{1}{2}$

III.—Con una rueda hidráulica de 10 metros de diámetro, movida con 120 litros de agua, se han molido 600 cargas en 8 días: se quiere saber ¿cuántas cargas podrá moler otra rueda que tiene 8 metros de diámetro, movida con 200 litros en 10 días?

m.	litros.	cargas.	días.
10	120	600	8
8	200	x	10

235.—Prueba de la regla de tres compuesta.—La prueba de esta operación se ejecuta comunmente, poniendo en lugar de la incógnita el número encontrado, y considerando como incógnita otro de los números dados. Si en el último problema se ha encontrado que $x=1000$ cargas, se buscará, por ejemplo, ¿cuántos litros de agua necesitará una rueda de

8 metros para moler en 10 días 1000 cargas? Si la operación y la prueba se han ejecutado sin equivocación deberá encontrarse 200 litros.

236.—Regla de compañía.—Esta operación tiene por objeto determinar la parte que corresponde á cada uno de varios socios, de la ganancia ó pérdida que la compañía ha tenido, y siendo la utilidad ó pérdida de cada compañero proporcional al capital introducido y al tiempo que lo haya tenido en giro, estos problemas pertenecen al dominio de la regla de tres. Se consideran dos casos: 1° la regla de compañía simple, esto es, cuando todos los capitales han permanecido en el giro el mismo tiempo; y 2° la regla de compañía compuesta, que es cuando los socios han tenido su capital en el fondo común tiempos desiguales.

1° Tres socios han puesto: el primero, 2000 pesos: el segundo, 4000 pesos, y el tercero, 3000 pesos: después de 2 años al disolverse la sociedad, encuentran que ha habido una pérdida de 495 pesos, y se quiere saber cuánto debe perder cada socio. La operación se dispone como sigue:

$ 2000
4000 $ 495 pérdida total.
3000

$ 9000 capital social.

$$9000 : 2000 :: 495 : x=110$$
$$9000 : 4000 :: 495 : x=220$$
$$9000 : 3000 :: 495 : x=165$$

$ 495

Sumando los capitales ó puestas de los tres socios, se obtiene 9000 pesos, y de este capital se ha tenido la pérdida de 495 pesos; y como la parte correspondiente à cada asociado será proporcional à su puesta, para determinar la pérdida del primer socio, ponemos la proporción:

$$9000 : 2000 :: 495 : x,$$

y se obtiene 110 pesos. De la misma manera se determinan las pérdidas 220 y 165 pesos que corresponden al segundo y tercer asociados, debiendo ser la suma de las pérdidas parciales, igual à la total, si no se ha cometido alguna equivocación.

Regla.—*Para resolver la regla de compañía simple, se establecen las proporciones necesarias, planteadas como sigue: el capital social ès al capital de cada compañero, como la ganancia ó pérdida total es á la parte correspondiente á cada socio.*

Se ve, pues, que la regla de compañía es un caso particular del problema más general: dividir una cantidad en partes proporcionales á números dados.

2ª—En la regla de compañía compuesta, los capitales permanecen en la sociedad tiempos desiguales. Tres socios han tenido en un giro mercantil la utilidad de 900 pesos, habiendo puesto el primero 2000 pesos durante 9 meses; el segundo 3000 pesos durante 10 meses; y el tercero 4000 pesos durante 12 meses; se quiere saber la parte de la utilidad que corresponde á cada socio.

$$\$\,900 \text{ de utilidad}\ldots\ \left\{\begin{array}{rr} \text{pesos.} & \text{meses.} \\ 2000 & 9 \\ 3000 & 10 \\ 4000 & 12 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} 2000\times 9=18000 \\ 3000\times 10=30000 \\ 4000\times 12=48000 \\ \hline 96000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 96000 : 18000 :: 900 : x=168'75 \\ 96000 : 30000 :: 900 : x=281'25 \\ 96000 : 48000 :: 900 : x=450'00 \\ \hline \$\ 900'00 \end{array}$$

Siendo los tiempos desiguales comenzaremos, por igualarlos, y para esto, determinaremos el capital que habría producido la misma utilidad durante un mes. Si con 2000 pesos se ha tenido cierta utilidad en 9 meses, para tenerla en un mes, se necesitaría un capital 9 veces mayor, esto es, 18000 pesos. Igualmente se necesitaría el capital $\$3000\times10$ para obtener la utilidad del segundo socio en un mes y $\$4000\times12$ para la del tercero. Una vez hecho esto, la regla de compañía compuesta se ha reducido á simple, y por medio de las correspondientes proporciones se determina la parte de utilidad perteneciente à cada socio; y la suma de las utilidades parciales deberá ser igual á la total, siempre que no se haya cometido algún error en la operación.

Regla.—*Para resolver la regla de compañía compuesta, se multiplica cada puesta por el tiempo que ha estado en la sociedad, y se establece una proporción planteada como sigue: la suma de los productos de las puestas por sus tiempos, es al producto de cada puesta por su tiempo, como la utilidad ó perdida total, es á la parte que corresponde á cada socio.*

Ejemplo.—Para hacer un terraplén tres socios, puso el primero 20 peones durante 15 días, el segundo puso 16 peones por 24 días y el tercero puso 12 peones por 30 días, habiendo recibido por el terraplén \$783, se quiere saber cuánto corresponderá de esta suma á cada socio.

En este ejemplo, en vez de capital, cada socio ha puesto peones.

237.—Regla de interés.—Esta operación que es una aplicación de la regla de tres, tiene por objeto determinar lo que se debe por una cantidad de dinero impuesta á rédito. El uso del comercio es estipular cuánto deben producir 100 pesos en determinado tiempo, y éste rédito ó interés se llama tanto por ciento. Si un capital se impone al 6 por ciento anual, esto significa que por cada 100 pesos debe pagarse el rédito ó interés de 6 pesos cada año, y se indica así: 6p%.

Si se quiere saber cuánto producirán de interés 20000 al 9 por ciento anual, una proporción nos hará encontrar el valor que buscamos.

$$\overset{\$}{100} : \overset{\$}{20000} :: 9 : x=\frac{20,000\times9}{100}=1800\ \$$$

Se ve, pues, que *para determinar el interés de una suma en la unidad de tiempo, basta multiplicarla por el número que indica el tanto por ciento y separar dos cifras á la derecha en el producto como decimales.*

Cuando se quiere determinar el interés de una suma en un tiempo diferente del de la unidad, es necesario establecer una segunda proporción con los tiempos y resolver el problema como regla de tres compuesta.

Se quiere saber cuánto se deberá por el interés de \$8000 al $1\frac{3}{4}$ por ciento mensual al cabo de 8 meses 20 dias.

Reduciendo los tiempos á dias y considerando los meses de 30 dias según la costumbre del comercio, resolveremos la regla de tres compuesta como sigue:

$$\begin{array}{c} \$\ 100 : \$\ 8000 :: 1\tfrac{3}{4} : x \\ \text{ds. } 30 : \text{ds. } 260 :: x : x' \\ \hline \end{array}$$

$$100\times30 : 8000\times260 :: 1\tfrac{3}{4} : x'=1\tfrac{3}{4}\times\frac{8000\times260}{100\times30}=\$1213'(33)$$

Se ve *que para determinar el interés de una suma en un tiempo diverso del de la unidad se multiplica la suma por el interés y por el tiempo, el producto se divide por la unidad de tiempo, y se separan dos decimales en el resultado.*

Si quisiéramos resolver el problema anterior por el método de reducción á la unidad, procederiamos como sigue:

Si 100 producen de interés	$1\frac{3}{4}$
1 producirá	$\frac{1.75}{100}$
y 8000 producirán	$\frac{1'75\times 8000}{100}$
Si en 30 días el interés es de	$\frac{1'75\times 8000\ \$}{100}$
en un día sería	$\frac{1'75\times 8000}{100\times 30}$
y en 260 días sería	$\frac{1'75\times 8000\times 260\ \$}{100\times 30}$

Regla de descuento.—El objeto de esta operación es determinar qué parte puede recibirse al contado de una suma que debiera percibirse á cierto plazo, descontando el interés correspondiente al tiempo por el cual se anticipa el pago.

Si se tiene por ejemplo, una libranza que vence á los 7 meses de la fecha por valor de 5000 pesos, y se quiere recibir la parte correspondiente de su importe desde luego, abonando por el anticipo el premio de 1 por ciento mensual, resolveremos el problema como sigue:

Supuesto que el interés mensual es 1 por ciento, en 7 meses será por ciento y veremos que se deben recibir 100 pesos al contado en lugar de 107 al plazo de 7 meses, por lo cual estableceremos la siguiente proporción:

$$107 : 5000 :: 100 : x=\frac{500000}{107}=4672'89$$

Si la operación está bien hecha, esta suma de 4672'89 pesos, debe producir en 7 meses al 1 por ciento mensual, lo bastante para convertirse en 5000 pesos. Este descuento se llama *interior*, y es poco usado en el comercio.

Comunmente la operación se hace fijando el descuento mensual sobre 100 pesos. En consecuencia por $100 pagaderos á siete meses, conviniendo el descuento de 1 por 100 al mes, solo se recibirán 93 al contado, y la proporción se establece como sigue.

$$100 : 5000 :: 93 : x=\frac{93\times 5000}{100}=4650$$

Esta operación, que es la usada en el comercio, se llama descuento *exterior*, y se comprueba calculando directamente el descuento, que agregándolo á la suma hallada, debe producir 5000 pesos.

$$100 : 5000 :: 7 : x=350$$
$$350+4650=5000$$

238.—Regla conjunta ó de cambio.—Esta operación tiene por objeto resolver fácilmente algunos problemas de regla de tres compuesta, cuyos datos todos están ligados entre sí únicamente por equivalencias.

Explicaremos el fundamento de su resolución por medio de varios ejemplos. Se sabe que 5 varas equivalen á 4'19 de metro, y se quiere saber á cuántos metros equivalen 20 varas.

Por regla de tres, el problema se resolverá como sigue:

$$\overset{vs}{5} : \overset{vs}{20} :: \overset{ms}{4'19} : x=\frac{4'19\times 20}{5}=16'76 \text{ metros.}$$

Para resolverlo haciendo uso del procedimiento de la regla conjunta, pondremos dos ecuaciones.

$$4'19 \text{ metros}=5 \text{ varas.}$$
$$20 \text{ varas}=x \text{ metros.}$$

Como una ecuación no se altera multiplicando sus dos miembros por un mismo número, si multiplicamos la primera por 20, y la segunda por 5, tendremos:

$$20\times 4'19 \text{ metros}=20\times 5 \text{ varas.}$$
$$20\times 5 \text{ varas}=x\times 5 \text{ metros,}$$

y como dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, resulta que

$$20\times 4'19 \text{ metros}=x\times 5 \text{ metros.}$$

y como si cantidades iguales se dividen por iguales, los resultados serán iguales, dividiendo los dos miembros de esta ecuación por 5, tendremos:

$$\frac{20\times 4'19}{5}=x$$

resultado idéntico al de la proporción.

Examinemos un ejemplo más complicado.

Si se quiere saber cuántas varas son 18 yardas, en el concepto de que 3'28 yardas equivalen á 3 metros, y de que 4'19 metros son iguales á 5 varas:

Resolviendo el problema por regla de tres compuesta se tendrá:

$$\begin{array}{ccccccc} \scriptstyle ys. & & \scriptstyle ms. & & \scriptstyle ys. & & \scriptstyle ms. \\ 3'28 & : & 3 & :: & 18 & : & x \\ \scriptstyle ms. & & \scriptstyle vs. & & \scriptstyle ms. & & \scriptstyle vs. \\ 4'19 & : & 5 & :: & x & : & x' \end{array}$$

$$3'28\times4'19 : 5\times3 :: 18 : x'=\frac{18\times3\times5}{3'28\times4'19}$$

Ahora bien: haciendo uso del procedimiento de la regla conjunta dispondremos los datos como sigue:

$$\begin{array}{lll} x & \text{varas} & =18 \text{ yardas} \\ 3'28 & \text{yardas} & = 3 \text{ metros} \\ 4'19 & \text{metros} & = 5 \text{ varas} \end{array}$$

Multiplicando ordenadamente las dos primeras ecuaciones, se tendrá:

$$x\times3'28 \text{ yardas}=18\times3 \text{ metros}.$$

ecuación que combinada

con la tercera . . . $4'19$ metros$=5$ varas,
dará . . . . $x\times3'28\times4'19$ yardas$=18\times3\times5$ varas,

y dividiendo los dos miembros de la última ecuación por el producto $3'28\times4'19$, se tiene:

$$x=\frac{18\times3\times5}{3'28\times4'19}$$

resultado igual al de la regla de tres compuesta.

Reflexionando en el orden de las ecuaciones sucesivas, y los razonamientos en que nos fundamos para multiplicarlas, se observará *que es necesario que el segundo miembro de cada ecuación sea de la especie del primero de la siguiente, y que cualquiera que sea el número de ecuaciones, el primer miembro de la primera ecuación deberá ser de la especie del segundo de la última. Una vez establecidos así los datos del problema, se multiplicarán ordenadamente las ecuaciones, y el valor de la incógnita se determinará dividiendo el producto de los números de que ella no forma parte, por el producto de los que multiplican á la incógnita.*

Comunmente se comienzan las ecuaciones por la incógnita y cuando el problema tiene por objeto determinar el valor de sumas expresadas en monedas de diversos países, toma el nombre de *regla de cambio ó de arbitrajes.*

Se quiere saber cuántas libras esterlinas valen 1,000 onzas mexicanas, en el concepto de que 100 onzas mexicanas equivalen á 1621 dollars americanos, que 4 dollars valen 21'36 francos, y que 50'42 francos valen 2 libras esterlinas.

El problema lo estableceremos en las cuatro ecuaciones siguientes, comenzando por la incógnita y terminando por un valor, 50'42 francos expresado en libras esterlinas, que es la especie de la incógnita.

$$\begin{array}{lrl} \text{Libras esterlinas} & x & =1000 \text{ onzas mexicanas.} \\ \text{Onzas} & 100 & =1621 \text{ dollars americanos.} \\ \text{Dollars} & 4 & =21'36 \text{ francos.} \\ \text{Francos} & 50'42 & =2 \text{ libras esterlinas.} \end{array}$$

$$x=\frac{1000\times1621\times21'36\times2}{100\times4\times50'42}=3433'61 \text{ libras esterlinas.}$$

El valor de la incógnita será igual al producto de las cantidades que forman los segundos miembros de las ecuaciones, dividido por el producto de las cantidades conocidas del primer miembro de las ecuaciones.

La regla conjunta ó de cambio, no es en realidad más que un caso de la regla de tres compuesta, cuya resolución se abrevia ó facilita por medio del procedimiento indicado, aunque en el fondo sea lo mismo que se hace para obtener el resultado final planteando una serie de reglas de tres.

Nota.—Con el objeto de poder explicar con la extensión debida los fundamentos y aplicaciones de las reglas de interés compuesto, aligación, falsa posición, progresiones y logaritmos, trataremos estas materias en Algebra, de acuerdo con el programa de la Escuela Nacional Preparatoria.

ÍNDICE.

ARITMÉTICA.

Pags.

Pags.

10

ÍNDICE.

ELEVACIÓN Á POTENCIAS Y EXTRACCIÓN DE RAÍCES.

RAZONES Y PROPORCIONES.

REGLA DE TRES.